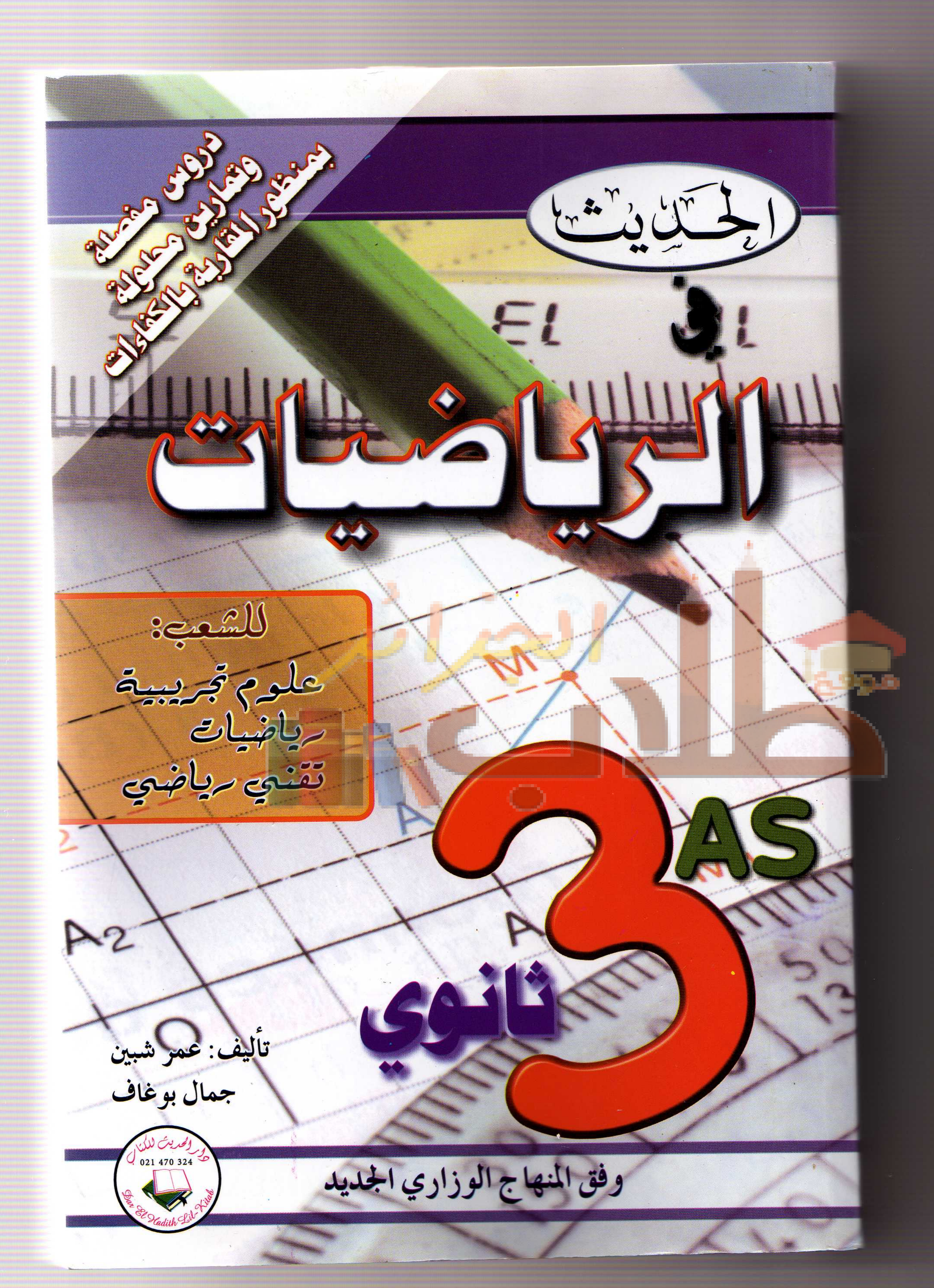

الحديث
في
الرياضيات
دروس مفصلة
وتمارين محلولة
بمنظور المقاربة بالكفاءات
للشعب:
علوم تجريبية
رياضيات
تقني رياضي
3AS
ثانوي
تأليف: عمر شبين
جمال بوغاف
دار الحديث للكتاب
021 470 324
Dar El-Hadith Lil-Kitab
وفق المنهاج الوزاري الجديد

تأليف الأستاذ: عمر شـبين
الأستاذ: جمال بوغاف

دروس مفصلة
وتمارين محلولة بمنظور
المقاربة بالكفاءات

الحديث في الرياضيات

لطلاب السنة 3 ثانوي

شعبة :

- ✓ علوم تجريبية .
- ✓ رياضيات .
- ✓ تقني رياضي.

وفق المنهاج الوزاري الجديد

دار الحديث للكتاب
الجزائر

1 - نهاية متتالية :

تعريف 1 :

نقول عن متتالية (U_n) أنها تتناهى نحو $+\infty$ إذا كان من أجل كل عدد A فإن المجال $[A ; +\infty[$ يشمل كل حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة .ونقول أيضا أن المتتالية متباعدة نحو $+\infty$ ونكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

مثال

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بحدها العام $U_n = n^2$. ما هي نهايتها ؟

الحل $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

تعريف 2 :

نقول عن المتتالية (U_n) أنها محدودة من الأعلى إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \le M$ ، حيث M عدد حقيقي .

خاصية 1 :

كل متتالية متزايدة و غير محدودة من الأعلى تتناهى نحو $+\infty$.

تعريف 3 :

نقول عن متتالية (U_n) أنها تتناهى نحو عدد λ إذا كان كل مجال مفتوح يشمل λ يحتوي على حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة . ونقول أن المتتالية متقاربة و نكتب :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lambda$$

مثال المتتالية (U_n) المعرفة بحدها العام $U_n = \frac{3}{n}$ متقاربة نحو 0 لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$

خاصية 2 :

•كل متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد الحقيقي A تتقارب نحو نهاية λ أصغر من أو تساوي A .

•كل متتالية متناقصة و محدودة من الأدنى بالعدد الحقيقي B تتقارب نحو نهاية μ أكبر من أو تساوي B .

2 - نهاية دالة عند $+\infty$ أو $-\infty$:

تعريف 4 :

لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل : $[x_0 ; +\infty[$.

نقول أن f تتناهى نحو $+\infty$ عندما يتناهى x نحو $+\infty$ إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد A فإن المجال $[A ; +\infty[$ يحتوي على كل قيم الدالة f من أجل x كبيرة جدا.ونكتب:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

مثال :

الدالة f حيث : $f(x)=x^2$ تتناهى نحو $+\infty$ من أجل x يتناهى نحو $+\infty$.

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

تعريف 5 :

•نقول أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ إذا وفقط إذا : $\lim\limits_{x\to+\infty} [-f(x)] = +\infty$

•نقول أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n = -\infty$ إذا وفقط إذا : $\lim\limits_{x\to+\infty} (-U_n) = +\infty$

تعريف 6 :

لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0 ; +\infty[$. نقول أن f تتناهى نحو λ عندما يتناهى x نحو $+\infty$ إذا كان كل مجال مفتوح يشمل λ يحتوي على كل قيم الدالة من أجل x كبيرة جدا .

ونكتب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lambda$. ونقول أن التمثيل البياني (C_f) للدالة f يقبل عند $+\infty$ مستقيم مقارب أفقي (Δ) معادلته : $y = \lambda$.

تعريف 7 :

لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0 ; +\infty[$. إذا كانت :

$$\begin{cases} f(x) = ax + b + g(x) & a \neq 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0 & \end{cases}$$

نقول أن $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته : $y = ax + b$

3 - نهاية دالة عند عدد حقيقي x_0

تعريف 8 :

لتكن f دالة معرفة بجوار x_0 (وليس بالضرورة عند x_0). نقول أن f تتناهى نحو $+\infty$ عندما يتناهى x نحو x_0 إذا وفقط إذا كان كل مجال $[A ; +\infty[$ يحتوي على كل قيم الدالة من أجل قيم x القريبة من x_0 ونكتب : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ونقول أن $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته : $x = x_0$.

تعريف 9 :

f دالة معرفة على مجال مفتوح و يشمل x_0 .

نقول أن f تتناهى نجو λ عندما يتناهى x نحو x_0 إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل λ يحتوي على كل قيم الدالة من أجل قيم x القريبة من x_0 ونكتب : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lambda$.

4 - النهايات و الحصر :

خاصية 3 :

لتكن (W_n) , (V_n) , (U_n) ثلاث متتاليات تحقق ، ابتداء من رتبة معينة :

$U_n \le V_n \le W_n$

إذا كانت (U_n) و (W_n) متتاليتان متقاربتان نحو λ فإن المتتالية (V_n) متقاربة نحو λ

أي : $\lim\limits_{x\to+\infty} V_n = \lambda$.

خاصية 4 :

لتكن f, g, h ثلاثة دوال تحقق بجوار x_0 (وكذلك عند $+\infty$ أو $-\infty$) :

$f(x) \le g(x) \le h(x)$.

إذا قبلت الدالتان f وh نهاية λ عندما يتناهى x نحو x_0 (أو $+\infty$ أو $-\infty$) فإن الدالة g تقبل نهاية λ ونكتب : $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lambda$ (أو $\lim\limits_{|x|\to+\infty} g(x)=\lambda$).

خاصية 5 :

f و g دالتان تحققان على مجال $[A ; +\infty[$: $f(x) \le g(x)$.

- إذا كانت : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$
- إذا كانت : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

5 - عمليات على نهايات المتتاليات و الدوال :

خاصية 6 : (نهاية المجموع)

	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n+V_n)$
1)	ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
2)	ℓ	$+\infty$	$+\infty$
3)	ℓ	$-\infty$	$-\infty$
4)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
5)	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
6)	$+\infty$	$-\infty$	حالة عدم التعيين

خاصية 7 : (نهاية الجداء).

	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n+V_n$
1)	ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
2)	$\ell\ (\ell>0)$	$+\infty$	$+\infty$
3)	$\ell\ (\ell<0)$	$+\infty$	$-\infty$
4)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
5)	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
6)	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

نقول أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته : $y = ax + b$

3 - نهاية دالة عند عدد حقيقي x_0

تعريف 8 :

لتكن f دالة معرفة بجوار x_0 (وليس بالضرورة عند x_0). نقول أن f تتناهى نحو $+\infty$ عندما يتناهى x نحو x_0 إذا وفقط إذا كان كل مجال $]A ; +\infty[$ يحتوي على كل قيم الدالة من أجل قيم x القريبة من x_0 ونكتب : $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ونقول أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته : $x = x_0$.

تعريف 9 :

f دالة معرفة على مجال مفتوح و يشمل x_0 .

نقول أن f تتناهى نحو λ عندما يتناهى x نحو x_0 إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل λ يحتوي على كل قيم الدالة من أجل قيم x القريبة من x_0 ونكتب : $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda$.

4 - النهايات و الحصر :

خاصية 3 :

لتكن (U_n) , (V_n) , (W_n) ثلاث متتاليات تحقق ، ابتداء من رتبة معينة :

$U_n \le V_n \le W_n$

إذا كانت (U_n) و (W_n) متتاليتان متقاربتان نحو λ فإن المتتالية (V_n) متقاربة نحو λ

أي : $\lim_{x\to+\infty} V_n = \lambda$.

خاصية 4 :

لتكن f , g , h ثلاثة دوال تحقق بجوار x_0 (وكذلك عند $+\infty$ أو $-\infty$) :

$f(x) \le g(x) \le h(x)$.

إذا قبلت الدالتان f و h نهاية λ عندما يتناهى x نحو x_0 (أو $+\infty$ أو $-\infty$) فإن الدالة g تقبل نهاية λ ونكتب : $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lambda$ (أو $\lim_{|x|\to+\infty} g(x) = \lambda$) .

خاصية 5 :

f و g دالتان تحققان على مجال $[A ; +\infty[$: $f(x) \le g(x)$.

- إذا كانت : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- إذا كانت : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ فإن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

5 - عمليات على نهايات المتتاليات و الدوال :

خاصية 6 : (نهاية المجموع)

	$\lim_{x\to x_0} f(x)$ أو $\lim_{n\to+\infty} U_n$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$ أو $\lim_{n\to+\infty} V_n$	$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x)$ أو $\lim_{n\to+\infty} (U_n+V_n)$
1)	ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
2)	ℓ	$+\infty$	$+\infty$
3)	ℓ	$-\infty$	$-\infty$
4)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
5)	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
6)	$+\infty$	$-\infty$	حالة عدم التعيين

خاصية 7 : (نهاية الجداء) .

	$\lim_{x\to x_0} f(x)$ / $\lim_{n\to+\infty} U_n$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$ / $\lim_{n\to+\infty} V_n$	$\lim_{x\to x_0} (f + g)(x)$ / $\lim_{n\to+\infty} U_n + V_n$
1)	ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
2)	$\ell\ (\ell > 0)$	$+\infty$	$+\infty$
3)	$\ell\ (\ell < 0)$	$+\infty$	$-\infty$
4)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
5)	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
6)	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
7)	0	$+\infty$ أو $-\infty$	حالة عدم التعيين

خاصية 8 : (نهاية المقلوب)

	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$	$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{U_n}\right)$
1)	$\ell \ (\ell \neq 0)$	$\frac{1}{\ell}$
2)	$+\infty$	0
3)	$-\infty$	0
4)	0 ($f(x) > 0$ و $U_n > 0$)	$+\infty$
5)	0 ($f(x) < 0$ و $U_n < 0$)	$-\infty$
6)	0	حالة عدم التعيين

خاصية 9 :

إذا كانت : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ و $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ فإن : $\lim\limits_{x \to a} (gof)(x) = C$

وتبقى الخاصية صحيحة عند تعويض a ، b أو c بـ $+\infty$ أو $-\infty$.

خاصية 10 :

لتكن f دالة و (U_n) متتالية إذا كانت : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = a$ و $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} [f(U_n)] = b$

وتبقى الخاصية صحيحة عند تعويض a أو b بـ : $+\infty$ أو $-\infty$.

التمارين

التمرين 1 :

أذكر صحة أم خطأ العبارات الآتية باستعمال الرمز √ للصحة و الرمز × للخطأ.

1) إذا كانت : $U_n < V_n$ من أجل كل عدد طبيعي n
و كانت : $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$.

2) لتكن f و g و h ثلاث دوال بحيث : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
إذا كانت : $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = 3$ و $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4$ فإن :
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$.

3) إذا كانت $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = 0$

4) كل متتالية متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بالعدد 4 فهي متقاربة نحو 4 .

5) إذا كانت : $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$ فإنه ابتداء من رتبة معينة تكون كل حدود (V_n) أصغر من -1000 .

6) توجد دالتان g و f بحيث : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 4$ بينهما $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \times g)(x) = -1$

التمرين 2 :

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x فإن : $f(x) \geq x - \frac{1}{x}$.

2) استنتج : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

التمرين 3 :

نعتبر الدالة g حيث : $g(x) = x^2 + x \sin x$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x فإن : $x(x-1) \leq g(x) \leq x(x+1)$

2) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي سالب x فإن: $x(x+1) \le g(x) \le x(x-1)$

4) استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

التمرين 4 :

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x - \sin x}$.

احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ ثم عند $-\infty$.

التمرين 5 :

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \frac{4\sqrt{x+7} - 3\sqrt{x+14}}{x-2}$.

1- عين مجموعة تعريف الدالة f . 2- احسب النهايات عند أطراف مجالات التعريف .

3- عين بواسطة معادلاتها المستقيمات المقاربة.

التمرين 6 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = \frac{\sqrt{|x|} + \cos x}{x - \sin x}$

1- بين أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$. 2- احسب النهاية للدالة f عند العدد 0 .

التمرين 7 :

نعتبر الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة بالعبارة :

$f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} + mx + 1$ حيث m وسيط حقيقي .

- عين مجموعة تعريف الدالة f.
- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها حسب قيم m .
- استنتج وجود مستقيمات مقاربة عمودية .

التمرين 8 :

احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 5x}{4x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 2x}{x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x^2}{x}$ 4) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to0}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

التمرين 9 :

نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$

بين أن التمثيل البياني (C) للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين

معادلتيهما : $y = 2x + \frac{1}{2}$ و $y = -\frac{1}{2}$.

تأكد من صحة هذه النتائج باستعمال آلة بيانية .

التمرين 10 :

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$.

1- عين الأعداد الحقيقية a , b , c , d بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من D_f

فإن : $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1}$.

2- احسب نهايات الدالة f عند أطراف D_f .

3- بين أن التمثيل البياني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيينهما.

4- ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) والمستقيم المقارب المائل.

5- تأكد بيانيا من صحة النتائج باستعمال آلة بيانية .

التمرين 11 :

نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{x - \sin^2 x}{2 + \sin x}$

1- برهن أنه يوجد عددان حقيقيان a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x

فإن : $a \le 2 + \sin x \le b$.

2- برهن على وجود دالتين g و h بحيث من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$g(x) \le f(x) \le h(x)$. ناقش حالة $x > 1$ و حالة $x < 0$.

3- عين النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

التمرين 12 :

احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to1} \frac{x^4 - 4x + 3}{x^5 - 1}$ ، $\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^3 + 27}{x + 3}$

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$ ؛ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x^p - 1}$: $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$

التمرين 13 :

- نعتبر الدوال h , g , f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 - 1} \quad ; \quad g(x) = \frac{a}{x+1} \quad ; \quad h(x) = \frac{b}{x-1}$$

عين العددان الحقيقيان الثابتان a و b بحيث :

$\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{f}{h}\right)(x) = 1$ و $\lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = 1$.

التمرين 14 :

احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + x + 1} - (x+1)\right]$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2 + x + 1} - (x+1)\right]$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}\right]$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^4 + x^2 + 2} - (x^2 + x + 1)\right]$

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^4 + x^2 + 2} - (x^2 + x + 1)\right]$

التمرين 15 :

احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + x}}$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + x}}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 3}}{x - \sqrt{x^2 + x - 3}}$ 4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x^2 + x} - 3}$

التمرين 16 :

نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x) = \frac{(m^2 - m)x^2 + 2mx + 1}{(m-1)x^2 + x - 2}$

حيث m وسيط من $\mathbb{R}$. ناقش حسب m : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

التمرين 17 :

نعتبر الدالتان f و g المعرفتان كما يلي : $f(x) = \sqrt{1 + x^2} + x$ ؛ $g(x) = \sqrt{1 + x^2} - x$

1) احسب $(f \times g)(x)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}$ فإن : $g(x) \geq 0$ و $f(x) \geq 0$.

3) استنتج مما سبق أن : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

4) نعتبر الدالة h المعرفة كما يلي : $h(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + g(x)\right]$.

بين مما سبق أن التمثيل البياني (C) للدالة h يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب تعيينهما .

5) باستعمال آلة بيانية أنشئ (C)

الحـــلـــول

التمرين 1 :

(1) × (2) × (3) √

(4) × (5) √ (6) √

التمرين 2 :

1) إثبات أن $f(x) \geq x - \frac{1}{x}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $\sin x \geq -1$ وبما أن x موجب تماما فإن :

وعليه بإضافة x إلى طرفي المتباينة نجد : $\frac{\sin x}{x} \geq \frac{-1}{x}$

$x + \frac{\sin x}{x} \geq x - \frac{1}{x}$. وبالتالي : $f(x) \geq x - \frac{1}{x}$

2) استنتاج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} x - \frac{1}{x} = +\infty$ وبما أن : $f(x) \geq x - \frac{1}{x}$ فإن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

التمرين 3 : --

1) تبيان أن $x(x-1) \leq g(x) \leq x(x+1)$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $-1 \leq \sin x \leq 1$.

وبما أن x موجب فإن : $-x \leq x\sin x \leq x$.

ومنه : $x^2 - x \leq x^2 + x\sin x \leq x^2 + x$.

وعليه : $x(x-1) \leq x^2 + x\sin x \leq x(x+1)$.

وبالتالي : $x(x-1) \leq g(x) \leq x(x+1)$.

2) استنتاج $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ لدينا : $x(x-1) \leq g(x) \leq x(x+1)$.

لكن : $\lim_{x\to+\infty} x(x-1) = \lim_{x\to+\infty} x(x+1) = +\infty$

وعليه : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

3) تبيان أن : $x(x+1) \leq g(x) \leq x(x-1)$ لدينا : $-1 \leq \sin x \leq 1$

وبما أن : x سالبة فإن : $-x \geq x\sin x \geq x$.

وعليه : $x \leq x\sin x \leq -x$.

وبالتالي : $x^2 + x \leq x^2 + x\sin x \leq x^2 - x$.

وعليه : $x(x+1) \leq g(x) \leq x(x-1)$.

4) استنتاج : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

لدينا : $x(x+1) \leq g(x) \leq x(x-1)$.

لكن : $\lim_{x\to-\infty} x(x+1) = \lim_{x\to-\infty} x(x+1) = +\infty$

وعليه : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

التمرين 4 : --

حساب النهايات :

لدينا : $-1 \leq \sin x \leq 1$ وعليه :

$-1 \leq -\sin x \leq 1$ وبالتالي : $x - 1 \leq x - \sin x \leq x + 1$

ومنه : $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x - \sin x} \leq \frac{1}{x-1}$

وبالتالي

$$x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x+1} \leq x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x - \sin x} \leq x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x-1}$$

إذن : $x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x+1} \leq f(x) \leq x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x-1}$

ولدينا : $\lim_{x\to+\infty} x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x+1} = +\infty$

وكذلك : $\lim_{x\to+\infty} x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x-1} = +\infty$

وعليه : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

كذلك : $\lim_{x\to-\infty} x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x+1} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x-1} = +\infty$

ومنه : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

التمرين 5 : --

1- تعيين مجموعة التعريف :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0 \,;\, x + 7 \geq 0 \,;\, x + 14 \geq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2 \,;\, x \geq -7 \,;\, x \geq -14\}$$

ومنه : $D_f = [-7 \,;\, 2[\cup]2 \,;\, +\infty[$

2- حساب النهايات :

$$\lim_{\substack{x\to-7 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-7 \\ >}} \frac{4\sqrt{x+7} - 3\sqrt{x+14}}{x-2} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\lim_{\substack{x\to2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to2 \\ <}} \frac{4\sqrt{x+7} - 3\sqrt{x+14}}{x-2}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{\left[4\sqrt{x+7} - 3\sqrt{x+14}\right]\left[4\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+14}\right]}{(x-2)\left[4\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+14}\right]}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{\left(4\sqrt{x+7}\right)^2 - \left(3\sqrt{x+14}\right)^2}{(x-2)\left[4\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+14}\right]}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{16(x+7) - 9(x+14)}{(x-2)\left[4\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+14}\right]}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{7(x-2)}{(x-2)\left[4\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+14}\right]}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{7}{4\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+14}} = \frac{7}{24}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{7}{4\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+14}} = \frac{7}{24}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{7}{4\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+14}} = 0$$

لأن : $\lim_{x \to +\infty} 4\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+14} = +\infty$

3- تعيين المستقيمات المقاربة بواسطة معادلاتها :

لدينا : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ و عليه التمثيل البياني للدالة f يقبل مستقيما مقاربا معادلته : $y = 0$.

التمرين 6 : --

1- تبيان أن f معرفة على $\mathbb{R}^*$:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - \sin x \neq 0\}$$

وعليه : $x - \sin x = 0$ معناه : $\sin x = x$

وحل هذه المعادلة هو $x = 0$.

ومنه : $D_f = \mathbb{R}^*$ إذن : $D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

2) حساب النهاية عند العدد 0 :

• من أجل $x > 0$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \cos x}{x - \sin x}$$

• من أجل $x < 0$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{-x} + \cos x}{x - \sin x}$$

ومنه من أجل $x \geq 0$: $x \geq \sin x$ ، أي أن : $x - \sin x \geq 0$

وعليه : $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\sqrt{x} + \cos x}{x - \sin x} = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \sqrt{x} + \cos x \longrightarrow 1 \\ x - \sin x \overset{>}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$

ومن أجل $x \leq 0$: $x \leq \sin x$ وعليه : $x - \sin x \leq 0$

وبالتالي : $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\sqrt{-x} + \cos x}{x - \sin x} = -\infty$

لأن : $\begin{cases} \sqrt{-x} + \cos x \longrightarrow 1 \\ x - \sin x \overset{<}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$

التمرين 7 : --

- تعيين مجموعة التعريف :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 + x + 1 \geq 0\}$$

نحل المتراجحة : $4x^2 + x + 1 \geq 0$

$\Delta = (1)^2 - 4(4)(1)$ ومنه : $\Delta = -15$ وعليه : $\Delta < 0$ ومنه :

$4x^2 + x + 1 > 0$ وعليه حلول المتراجحة هي $\mathbb{R}$ إذن : $D_f = \mathbb{R}$

- حساب النهايات :

$$\lim_{n \to -\infty} f(x) = \lim_{n \to -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + mx + 1$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2\left(4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + mx + 1$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -x\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + mx + 1$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x\left[-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + m + \frac{1}{x}\right]$$

نلاحظ أن :
$$\begin{cases} -\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + m + \frac{1}{x} \longrightarrow m - 2 \\ x \longrightarrow -\infty \end{cases}$$

وعليه :

- إذا كان $m - 2 > 0$ أي $m > 2$

فإن : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

- إذا كان $m - 2 < 0$ أي $m < 2$

فإن : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

- إذا كان $m - 2 = 0$ أي $m = 2$:

حالة عدم التعيين

إزالة عدم التعيين لما $m = 2$:

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x + 1$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left[\sqrt{4x^2 + x + 1} + (2x + 1)\right]\left[\sqrt{4x^2 + x + 1} - (2x + 1)\right]}{\sqrt{4x^2 + x + 1} - (2x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 + x + 1 - (2x + 1)^2}{\sqrt{4x^2 + x + 1} - (2x + 1)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 + x + 1 - 4x^2 - 4x - 1}{\sqrt{4x^2 + x + 1} - (2x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2\left(4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - 2x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x}{-x\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x - 1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x}{x\left[\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 - \frac{1}{x}\right]} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3}{-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 - \frac{1}{x}} = \frac{3}{4}$$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + mx + 1$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2\left(4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + mx + 1$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + mx + 1$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left[\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + m + \frac{1}{x}\right]$$

نلاحظ أن :
$$\begin{cases} x \longrightarrow +\infty \\ \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + m + \frac{1}{x} \longrightarrow 2 + m \end{cases}$$

وعليه :

- إذا كان $2 + m > 0$ أي $m > -2$ فإن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- إذا كان $2 + m < 0$ أي $m < -2$ فإن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- إذا كان $2 + m = 0$ أي $m = -2$: حالة عدم التعيين

إزالة حالة عدم التعيين

لما $m = -2$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} - (2x - 1)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{4x^2 + x + 1} - (2x - 1)\right]\left[\sqrt{4x^2 + x + 1} + (2x - 1)\right]}{\sqrt{4x^2 + x + 1} + (2x - 1)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} - (2x - 1)^2}{\sqrt{4x^2 + x + 1} + (2x - 1)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 + x + 1 - (4x^2 - 4x + 1)}{\sqrt{4x^2 + x + 1} + (2x - 1)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+2x-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{x\left[\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2-\frac{1}{x}\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2-\frac{1}{x}} = -\frac{3}{4}$$

- إستنتاج وجود مستقيمات مقاربة :

من أجل $m = 2$. يوجد مستقيم مقارب معادلته $y = \frac{3}{4}$ عند $-\infty$

من أجل $m = -2$: يوجد مستقيم مقارب معدلته $y = -\frac{3}{4}$ عند $+\infty$

التمرين 8: --

1) $$\lim_{x\to0} \frac{\sin 5x}{4x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{5x}{4x}$$

و منه : $$\lim_{x\to0} \frac{\sin 5x}{4x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{5}{4} = 1 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

2) $$\lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{x}$$

ومنه ندرس حالتين :

- $$\lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{\sin 2x}{x^2} = \lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{x} = +\infty$$
- $$\lim_{\substack{x\to0\\<}} \frac{\sin 2x}{x^2} = \lim_{\substack{x\to0\\<}} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{x} = -\infty$$

3) $$\lim_{x\to0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x^2}{x^2} \times \frac{x^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin x^2}{x^2} \times x = 0$$

4) $$\lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{\sin x}{x} \times \sqrt{x} = 0$$

التمرين 9: --

إثبات أن (C) يقبل يقبل مستقيمين مقاربين :

a) $$\lim_{|x|\to+\infty} \left[f(x) - \left(2x+\frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{|x|\to+\infty} x + \sqrt{x^2+x+1} - 2x - \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{|x|\to+\infty} -x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}$$

و عليه : $$\lim_{x\to-\infty} f(x) - \left(2x+\frac{1}{2}\right) = +\infty$$

بينما $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(2x+\frac{1}{2}\right)$ في حالة عدم التعيين

إزالة عدم التعيين :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(2x+\frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - \left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2+x+1} - \left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\left[\sqrt{x^2+x+1} + \left(x+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sqrt{x^2+x+1} + \left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+x+1) - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x + 1 - \left(x + x + \frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}} = 0$$

وعليه : $y = 2x + \frac{1}{2}$ معادلة مستقيم مقارب عند $+\infty$.

(b $\lim_{|x|\to+\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{|x|\to+\infty} \left[x + \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2}\right]$

وعليه: $\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = +\infty$

أما $\lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + \left(x + \frac{1}{2}\right)$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2 + x + 1} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\right]\left[\sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right]}{\sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + x + 1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + x + 1 - \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x - \frac{1}{2}} = 0$$

وعليه : $y = -\frac{1}{2}$ معادلة مستقيم مقارب عند $-\infty$.

التمرين 10 : --

1- تعيين الأعداد a, b, c, d :

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\}$.

وعليه : $D_f = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$.

ولدينا : $f(x) = \frac{(ax + b)(x^2 - 1) + cx + d}{x^2 - 1}$

$f(x) = \frac{ax^3 - ax + bx^2 - b + cx + d}{x^2 - 1}$

إذن : $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + (-a + c)x - b + d}{x^2 - 1}$

وبالتالي : $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ -a + c = -3 \\ -b + d = 2 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ -2 + c = -3 \\ 1 + d = 2 \end{cases}$

أي أن : $a = 2 \;;\; b = -1 \;;\; c = -1 \;;\; d = 1$

إذن : $f(x) = 2x - 1 + \frac{-x + 1}{x^2 - 1}$

2- حساب النهايات عند أطراف D_f :

لدينا : $D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

وعليه :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$$

إشارة $x^2 - 1$:

x	$+\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		+	0	-	0	+	

• $$\lim_{\substack{x\to -1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1 \\ <}} \frac{2x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = +\infty$$

لأن : $$\begin{cases} 2x^3 - x^2 - 3x + 2 \longrightarrow 2 \\ x^2 - 1 \overset{>}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

• $$\lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} \frac{2x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = -\infty$$

لأن : $$\begin{cases} 2x^3 - x^2 - 3x + 2 \longrightarrow 2 \\ x^2 - 1 \overset{<}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

• $$\lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{2x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = 0$$

حالة عدم التعيين .ومنه نزيل عدم التعيين

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(2x^2 + x - 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2 + x - 2}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

3- تعيين معادلات المستقيمات المقاربة :

• بما أن $\lim_{\substack{x\to -1 \\ <}} f(x) = +\infty$ و $\lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$

فإن $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب .

• وبما أن : $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{-x + 1}{x^2 - 1}$ ولدينا :

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{-x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{-(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{-1}{x + 1} = 0$$

فإن : $y = 2x - 1$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

4- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى و المستقيم المقارب المائل :

لدينا : $f(x) - (2x - 1) = \dfrac{-1}{x + 1}$ وعليه :

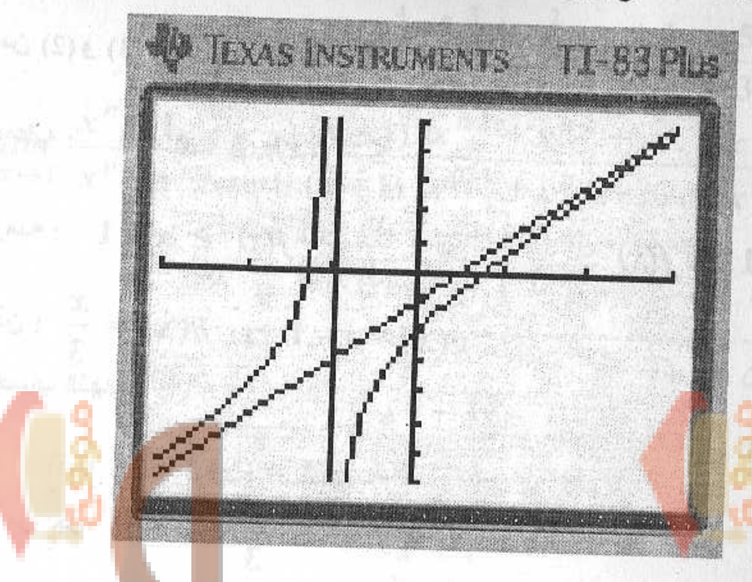
• من أجل $x + 1 > 0$ أي $x > -1$ فإن : $f(x) - y < 0$

وعليه البيان يقع تحت المستقيم المقارب المائل .

• من أجل $x + 1 < 0$ أي $x < -1$ فإن : $f(x) - y > 0$

وعليه البيان يقع فوق المستقيم المقارب المائل .

5- باستعمال آلة بيانية نستنتج وجود مستقيمين مقاربين حسب الوضعية السابقة .



التمرين 11 :

1) البرهان على وجود a و b :

لدينا : $-1 \leq \sin x \leq 1$

وعليه : $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$ ومنه : $a = 1$ و $b = 3$

2) البرهان على وجود دالتين :

لدينا : $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ وعليه : $-1 \leq -\sin^2 x \leq 0$

وبالتالي : $x - 1 \leq x - \sin^2 x \leq x \quad \ldots(1)$

و مما سبق لدينا : $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$

و عليه : $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{2 + \sin x} \leq 1 \quad \ldots(2)$

من (1) و (2) و من أجل $x \geq 1$ نجد : $\dfrac{x - 1}{3} \leq \dfrac{x - \sin^2 x}{2 + \sin x} \leq x$

ومنه لما $x \geq 1$: $\dfrac{x - 1}{3} \leq f(x) \leq x$.

إذن : $h(x) = x$ و $g(x) = \dfrac{x - 1}{3}$.

من أجل $x < 0$: (1) تصبح : $-(x - 1) \geq -(x - \sin x^2) \geq -x$

و منه : (3) ... $-x \leq -(x - \sin^2 x) \leq -x + 1$

من (2) و (3) نجد : $-\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{-(x - \sin^2 x)}{2 + \sin x} \leq -x + 1$

وعليه : $-\dfrac{x}{3} \leq -f(x) \leq -x + 1$

ومنه : $\dfrac{x}{3} \geq f(x) \geq x - 1$ إذن : $x - 1 \leq f(x) \leq \dfrac{x}{3}$

إذن : $h(x) = \dfrac{x}{3}$ و $g(x) = x - 1$

3) حساب النهايات :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

لدينا من أجل $x < 0$: $x - 1 \leq f(x) \leq \dfrac{x}{3}$

ولدينا : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{3} = -\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

لدينا من أجل $x \geq 1$: $\dfrac{x - 1}{3} \leq f(x) \leq x$

ولدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 1}{3} = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: وعليه

التمرين 12 : ---------------------------------

- $$\lim_{x \to -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x + 3)(x^2 - 3x + 9)}{x + 3}$$
$$= \lim_{x \to -3} (x^2 - 3x + 9) = 27$$

- $$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 4x + 3}{x^5 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^3 + x^2 + x - 3)}{(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} = 0$$

- $$\lim_{x \to -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)}$$
$$= \lim_{x \to -1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{5}{3}$$

- $$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x^p - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)}{(x - 1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1)}$$
$$= \frac{1 + 1 + \dots + 1}{1 + 1 + \dots + 1} = \frac{n}{p}$$

التمرين 13 : ---------------------------------

تعيين العددين a و b :

2 - لدينا : $$\lim_{x \to -1} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to -1} \frac{\dfrac{x^3 + 3x}{x^2 - 1}}{\dfrac{a}{x + 1}}$$
$$= \lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 3x}{x^2 - 1} \times \frac{x + 1}{a}$$

و منه : $$\lim_{x \to -1} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 3x}{(x - 1)(x + 1)} \times \frac{x + 1}{a}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 3x}{a(x - 1)} = \frac{-4}{-2a} = \frac{2}{a}$$

وعليه : $\dfrac{2}{a} = 1$ وبالتالي : $a = 2$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{f}{h}\right)(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{x^3 + 3x}{x^2 - 1}}{\dfrac{b}{x - 1}} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 3x}{(x - 1)(x + 1)} \times \frac{x - 1}{b}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 3x}{b(x + 1)} = \frac{4}{2b} = \frac{2}{b}$$

ومنه : $\frac{2}{b}=1$ أي أن : $b=2$

التمرين 14 : --

- حساب النهايات :

• $\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)\right]=+\infty$

• $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)\right]\left[\sqrt{x^2+x+1}+(x+1)\right]}{\sqrt{x^2+x+1}+x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-(x^2+2x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}+x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}\right]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}=-\frac{1}{2}$$

• $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^4+x^2+2}-(x^2+x+1)\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{x^4+x^2+2}-(x^2+x+1)\right]\left[\sqrt{x^4+x^2+2}+(x^2+x+1)\right]}{\sqrt{x^4+x^2+2}+(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^2+2-(x^2+x+1)^2}{\sqrt{x^4+x^2+2}+(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^2+2-(x^4+3x^3+3x^2+2x+1)}{\sqrt{x^4+x^2+2}+(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^3-2x^2-2x+1}{\sqrt{x^4+x^2+2}+(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left[-3-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right]}{\sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}+(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left[-3-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right]}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

و منه :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^4+x^2+2}-(x^2+x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[-3-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right]}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\infty$$

• $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right]\left[\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}\right]}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{-\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]}=-\frac{1}{2}$$

• مما سبق : $\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^4+x^2+2}-(x^2+x+1)\right]$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left[-3-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right]}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

التمرين 15 :

• $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{2x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2x+x\sqrt{4+\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[1-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]}{x\left[2+\sqrt{4+\frac{1}{x}}\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2+\sqrt{4+\frac{1}{x}}} = 0$$

• $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{2x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2x-x\sqrt{4+\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left[1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]}{x\left[2-\sqrt{4+\frac{1}{x}}\right]}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{2-\sqrt{4+\frac{1}{x}}} = +\infty$$

• $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+x-3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[1-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right]}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}} = 0$$

• $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+x-3}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left[1+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right]}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}} = -2$$

التمرين 16 :

من أجل $m \neq 1$ لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left[m^2-m+\frac{2m}{x}+\frac{1}{x^2}\right]}{x^2\left[m-1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{m^2 - m + \frac{2m}{x} + \frac{1}{x^2}}{m - 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{m^2 - m}{m - 1} = \frac{m(m-1)}{m-1} = m$$

* من أجل $m = 1$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$

التمرين 17 : ---

1) حساب $(f\times g)(x)$:

$$(f\times g)(x) = \left[\sqrt{1+x^2}+x\right]\left[\sqrt{1+x^2}-x\right]$$
$$= 1+x^2-x^2 = 1$$

2) - تبيان أن $f(x)\ge 0$:

- من أجل $x\ge 0$: $\sqrt{1+x^2}+x\ge 0$. محققة دوما وعليه $f(x)\ge 0$.
- من أجل $x<0$: $\sqrt{1+x^2}+x>0$. معناه : $\sqrt{1+x^2} > -x$

وعليه : $1+x^2>x^2$ أي $1>0$ وهذا محقق دوما. إذن : $f(x)\ge 0$. و

عليه : $f(x)\ge 0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

- تبيان أن $g(x)\ge 0$:

- من أجل $x<0$: $\sqrt{1+x^2}-x>0$ محققة دوما . ومنه : $g(x)\ge 0$.
- من أجل $x\ge 0$: $\sqrt{1+x^2}-x>0$ معناه : $\sqrt{1+x^2}>x$

ومنه : $1+x^2>x^2$ أي: $1>0$ محقق إذن : $g(x)\ge 0$.

وعليه : $g(x)\ge 0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

3) استنتاج النهايات :

لدينا : $(g\times f)(x) = 1$ ومنه : $f(x)=\frac{1}{g(x)}$

وبالتالي : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = 0$

ولدينا : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ومنه : $= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}$ إذن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

4) تبيان أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين :

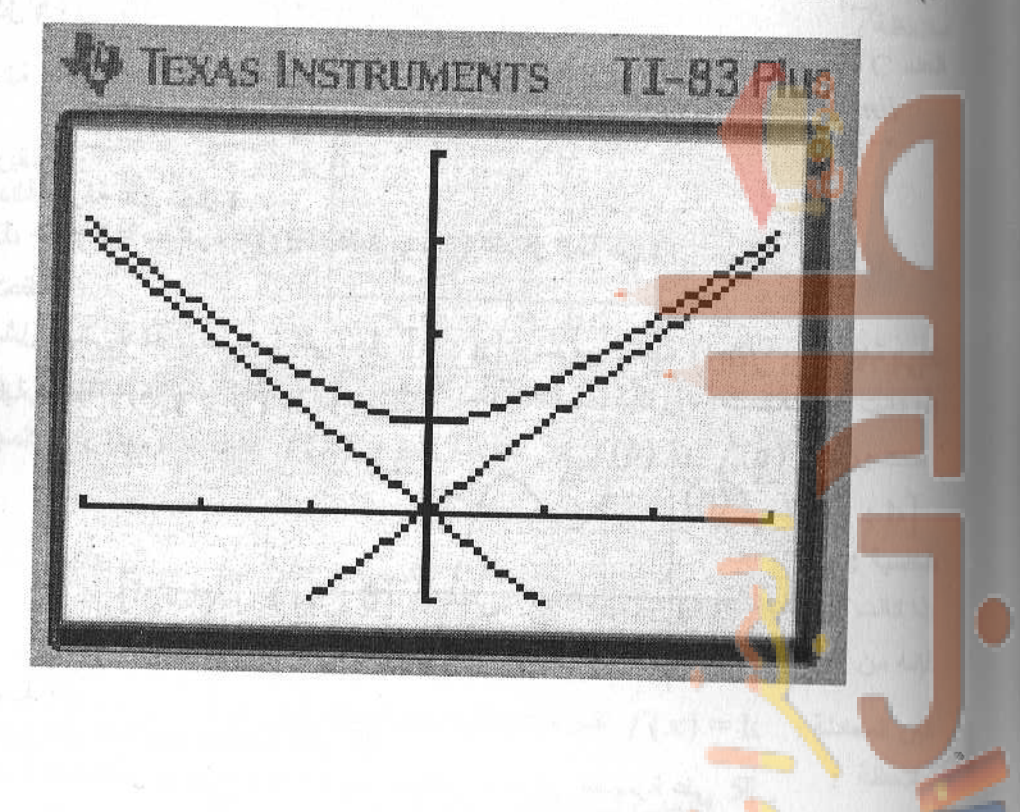
لدينا : $h(x) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+x^2}+x+\sqrt{1+x^2}-x\right]$

ومنه : $h(x)=\sqrt{1+x^2}$ و عليه : $\lim_{x\to+\infty} h(x)-x = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x^2}-x = 0$

ومنه : $y=x$ معادلة مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$. وكذلك :

$\lim_{x\to-\infty} h(x)+x = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+x^2}+x = 0$ ومنه $y=-x$ معادلة مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$.

5) انشاء بيان الدالة h :



2- الدوال المستمرة

I- الدوال المستمرة :

تعريف 1 :

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح I يشمل عدد a .

نقول عن f أنها مستمرة عند a إذا كانت : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

مثال 1 :

الدالة : $f : x \mapsto x^2$ مستمرة عند العدد 2 لأن : $\lim_{x \to 2} x^2 = 4 = f(2)$

مثال 2 :

الدالة : $f : x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة عند العدد 9 لأن : $\lim_{x \to 9} \sqrt{x} = 3 = f(9)$

مثال 3 :

الدالة : $f : x \mapsto \cos x$ مستمرة عند $\frac{\pi}{2}$ لأن : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

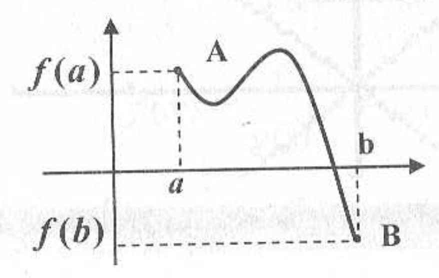
تعريف 2 :

f دالة معرفة على مجال I .

نقول عن f أنها مستمرة على I إذا كانت مستمرة عند كل قيمة من I .

ملاحظة :

التمثيل البياني لدالة f مستمرة على مجال $[a ; b]$ يرسم من النقطة $A\left(a ; f(a)\right)$ إلى غاية النقطة $B\left(b ; f(b)\right)$ دون توقف .



خاصية 1 :

- الدوال كثيرات الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال المثلثية : $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على $\mathbb{R}_+$.
- إذا كانت f و g دالتان مستمرتان على I فإن :

$f+g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$, fog دوال مستمرة على مجموعات تعريفها.

أمثلة :

- الدالة $f : x \mapsto \frac{2}{x-1}$ مستمرة على كل من المجالين $]-\infty ; 1[$ و $]1 ; +\infty[$
- الدالة $f : x \mapsto \tan x$ مستمرة على مجموعة تعريفها أي من أجل $\cos x \neq 0$ أي $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$.

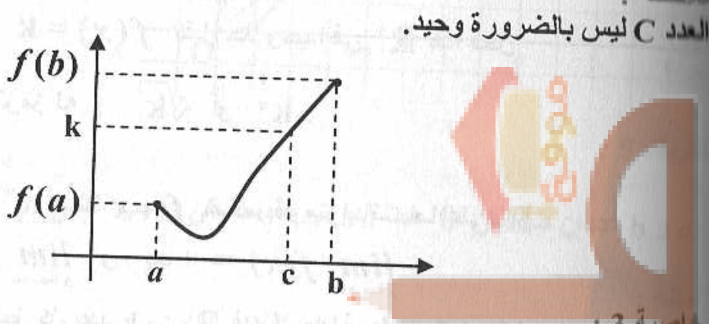
II- نظرية القيم المتوسطة :

خاصية 2 : (نظرية القيم المتوسطة).

لتكن f دالة معرفة ومستمرة على مجال I حيث a و b عددان من I. من أجل كل عدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد عدد C محصور بين a و b بحيث : $f(c) = k$.

ملاحظة :

العدد C ليس بالضرورة وحيد.



خاصية 3 :

إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماما على مجال $[a ; b]$ ، فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة : $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا c من المجال $[a ; b]$.

خاصية 4 :

إذا كانت f دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[a ; b]$ أو $[a ; +\infty[$

فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $\lim_{x \to b} f(x)$ أو $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

فإن المعادلة : $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا c من المجال $[a ; b]$.

ملاحظة :

الخاصية السابقة تبقى صحيحة على كل من المجالات :

$]-\infty ; +\infty[\ ,\ ]-\infty ; a[\ ,\ [a ; b]\ ,\ [a ; b]$.

مثال :

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \frac{1}{x+2}$

- الدالة f معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-2 ; +\infty[$.
- لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ >}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

وعليه من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $]0 ; +\infty[$ فإن المعادلة : $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-2 ; +\infty[$.

III- دالة الجذر n – iémes :

تعريف 3 :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فالدالة $f : x \mapsto x^n$ معرفة ومستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}^+$.

وبما أن $f(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ فإنه حسب الخاصية 4 من أجل كل عدد حقيقي k من $\mathbb{R}^+$ فإن المعادلة : $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}^+$ هذا الحل يسمى الجذر n – ième ونرمز له : $\sqrt[n]{k}$ أو $k^{\frac{1}{n}}$.

ملاحظة :

إذا كان n فردي فإن الدالة $f : x \mapsto x^n$ مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

فإنه حسب الخاصية 4 من أجل كل عدد k من $\mathbb{R}$ فإن المعادلة $x^n = k$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ وعليه الجذر n – ième للعدد k معرف على $\mathbb{R}$.

مثال :

من أجل $k > 0$ المعادلة : $x^2 = k$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}^+$ يسمى الجذر التربيعي للعدد k ونرمز له بالرمز $\sqrt[2]{k}$ أو $k^{\frac{1}{2}}$ واختصارا يرمز له بالرمز $\sqrt{k}$.

تعريف 4 :

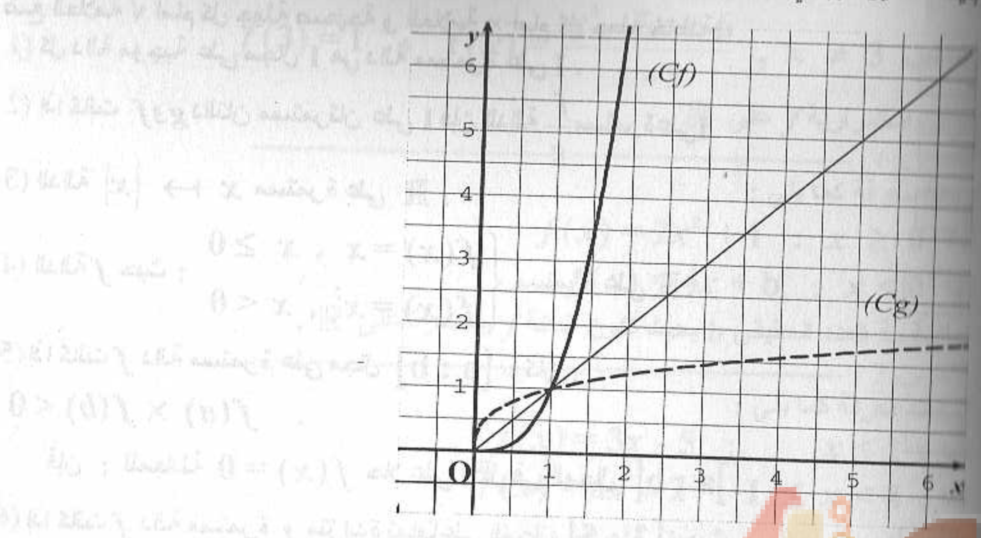
من أجل كل عدد طبيعي موجب تماما n ، نسمي دالة الجذر n – ième الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بالعبارة : $f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$.

خاصية 5 :

دالة الجذر n – ième f مستمرة و متزايدة تماما و تحقق $f(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ التمثيلين البيانيين للدالتين $x \mapsto x^n$ و $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متناظرين بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته : $y = x$.

مثال :

إليك التمثيل البياني للدالتين : $f : x \mapsto x^3$, $g : x \mapsto \sqrt[3]{x}$



تعريف 5 :

a و b عددان طبيعيان $b \neq 0$. x عدد حقيقي موجب نضع : $x^{\frac{a}{b}}=\left(x^{\frac{1}{b}}\right)^a$

أمثلة :

* $(81)^{\frac{3}{2}}=\left(81^{\frac{1}{2}}\right)^3=\left(\sqrt{81}\right)^3=9^3=729$.
* $27^{\frac{-4}{3}}=\dfrac{1}{27^{\frac{4}{3}}}=\dfrac{1}{\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^4}=\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^4}=\dfrac{1}{3^4}=\dfrac{1}{81}$.

خاصية 6 :

x و y عددان حقيقيان . n و p عددان ناطقان غير معدومين لدينا :

- $(x^n)^p = x^{n.p}$
- $x^n \times y^n = (x \times y)^n$
- $x^n \times x^p = x^{n+p}$

أمثلة :

- $4^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}}$
- $3^{\frac{1}{5}} \times 4^{\frac{1}{5}} = (3 \times 4)^{\frac{1}{5}} = 12^{\frac{1}{5}}$
- $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{5}} = 5^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}} = 5^{\frac{1}{5}}$

التمـــــارين

التمرين 1 :

ضع العلامة √ أمام كل جملة صحيحة و العلامة × أمام كل جملة خاطئة.

1) كل دالة موجبة على مجال I هي دالة مستمرة على I . ☐

2) إذا كانت f و g دالتان مستمرتان على I فإن الدالة $\frac{f}{g}$ مستمرة على I ☐

3) الدالة $x \mapsto |x|$ مستمرة على $\mathbb{R}$. ☐

4) الدالة f حيث : $\begin{cases} f(x) = x \ , \ x \geq 0 \\ f(x) = x^2 \ , \ x < 0 \end{cases}$ مستمرة على $\mathbb{R}$. ☐

5) إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a\ ;\ b]$ وكان : $f(a) \times f(b) < 0$.

فإن : للمعادلة $f(x) = 0$ حلا على الأقل في المجال $]a\ ;\ b[$. ☐

6) إذا كانت f دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[3\ ;\ 5]$ حيث $f(3) = 4$ و $f(5) = 10$ فإن للمعادلة $f(x) = 7$ حلا وحيدا في المجال $]3\ ;\ 5[$. ☐

7) إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ فهي مستمرة عند كل قيمة a من I . ☐

8) إذا كانت f دالة مستمرة عند عدد a من مجال I فهي مستمرة عند كل قيم I . ☐

التمرين 2 :

نعتبر الدالة f المعرفة كمايلي : $\begin{cases} f(x) = x^3 - 4x \ , \ x \neq 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$

ادرس استمرارية الدالة f عند 2 ثم على $\mathbb{R}$.

التمرين 3 :

ادرس استمرارية الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$f(x) = |4x - 5|$ على $\mathbb{R}$

التمرين 4 :

f دالة معرفة كما يلي : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin 4x}{x} \ , \ x \neq 0 \\ f(0) = 4 \end{cases}$

ادرس استمرارية الدالة f عند 0 ثم على $\mathbb{R}$.

التمرين 5 :

f دالة معرفة كما يلي :

من أجل $x \neq 3$ ، $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ و $f(3) = 1$

ادرس استمرارية f على $\mathbb{R}$.

التمرين 6 :

f دالة معرفة كما يلي :

لما $x \geq 0$: $f(x) = 2x^2 + 1$

لما $x < 0$: $f(x) = 4x + b$

عين قيمة العدد الحقيقي b بحيث تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

التمرين 7 :

f دالة معرفة كما يلي :

لما : $x < 1$: $f(x) = 3x - 5$

لما : $1 \leq x < 4$: $f(x) = ax + 2$

لما : $x \geq 4$: $f(x) = x^2 - b$

عين العددان a و b حتى تكون f مستمرة على $\mathbb{R}$

التمرين 8 :

f دالة معرفة بجدول تغيراتها كما يلي :

x	-5		2		5
$f(x)$	-2	↗	1	↘	-3

ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[-5\ ;\ 5]$

التمرين 9 :

f دالة معرفة بجدول تغيراتها كما يلي :

x	-5		2		5
$f(x)$	2	↘	-3	↗	1

ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = -1$ في $\mathbb{R}$.

التمرين 10 :

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = x^4 - 4x - 10$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$. استنتج عدد حلول المعادلة : $f(x) = 0$

باستعمال آلة حاسبة استنتج حصرا لكل من حلولها في مجال سعته 10^{-3}.

التمرين 11 :

أثبت أن المعادلة $cosx = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0 ; 1]$.

التمرين 12 :

أنشر العبارات التالية :

$$A = \left(5^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{5}{2}}\right)^2 \quad ; \quad B = \left(3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$C = \left(5^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}\right)\left(5^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}\right) \quad ; \quad D = \left(3^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

التمرين 13 :

بسط العبارات التالية :

$\sqrt[2]{27} \times \sqrt[3]{9} \quad ; \quad \sqrt[3]{8} \times \sqrt[5]{2} \quad ; \quad \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{36}$.

التمرين 14 :

1-حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2x + 5 = 9$. 2-حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2x^2 + 5 = 9$

3-حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2x^3 + 5 = 9$ .4-حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2x^4 + 5 = 9$

5-استنتج حلول المعادلة : $2x^n + 5 = 9$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

التمرين 15 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - x - \dfrac{|x - 1|}{x - 1} \ : \ x \neq 1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f . 2) أدرس استمرارية الدالة f عند العدد 1.

3) أدرس استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها .

4) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $\left]1 ; \frac{3}{2}\right[$.

التمرين 16 :

أثبت أن المعادلة : $-\sin x + \frac{1}{4} cosx = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $\left]0 ; \frac{\pi}{4}\right[$.

التمرين 17 :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة ومستمرة على المجال $[a ; b]$. α و β عددان حقيقيان موجبان برهن أنه يوجد على الأقل عدد حقيقي λ ، من المجال : $[a ; b]$ بحيث : $\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(\lambda)$.

التمرين 18 :

f دالة معرفة على $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ بالعبارة :

$$\begin{cases} f(x) = \sin x + \dfrac{\sqrt{1 - cos\,2x}}{\sin x} \ , \ x \neq 0 \\ f(0) = \sqrt{2} \end{cases}$$

ادرس استمرارية الدالة f عند 0 .

التمرين 19 :

في المجال $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة :

$$f(x) = \frac{\dfrac{1}{cos^2 x} - 2\tan x}{cos\,2x} \ , \ x \neq \frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

1- عين مجموعة تعريف الدالة f . 2-أدرس استمرارية الدالة f عند $\frac{\pi}{4}$.

التمرين 20 :

I) لتكن g الدالة المعرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ بالعبارة : $g(x) = x^3 - 120x - 100$

1) احسب نهايات الدالة g عند أطراف المجال $[0 ; +\infty[$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g وأكتب جدول تغيراتها .

3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[20 ; 40]$.

4) عين قيمة مقربة للوحدة للعدد α . استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعرف الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$ بالعبارة : $f(x) = x + 50 + \dfrac{1200x + 50}{x^2}$

1-احسب نهايات الدالة f على أطراف $]0 ; +\infty[$.

2-بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0 ; +\infty[$ فإن: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$

3-ادرس تغيرات الدالة f .4- بين أن $y = x + 50$ معادلة مستقيم مقارب (D) للمنحنى (C) .5- أنشئ (D) و (C) .

نأخذ 1cm مقابل 5 على محور الفواصل و 20 على محور التراتيب .

6-حل بيانيا المعادلة $f(x) = 130$.

الحلول

التمرين 1 :

(1 ×   (2 ×   (3 √

(4 √   (5 √   (6 √

(7 √   (8 × .

التمرين 2 :

- دراسة استمرارية f عند 2 : $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^3 - 4x = 4$$

وعليه : $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ومنه f مستمرة عند 2 .

- دراسة استمرارية f على $\mathbb{R}$

لدينا : $f(x) = x^2 - 4x$

ومنه : f دالة كثيرة حدود فهي مستمرة على كل من المجالين $]-\infty ; 2[$ و $]2 ; +\infty[$.

وبما أن الدالة f مستمرة عند 2 فإن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

التمرين 3 :

- دراسة استمرارية f :

• كتابة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} f(x) = 4x - 5 \ ; \ 4x - 5 \geq 0 \\ f(x) = -(4x - 5) \ ; \ 4x - 5 \leq 0 \end{cases}$$

وعليه :

$$\begin{cases} f(x) = 4x - 5 \ ; \ x \geq \frac{5}{4} \\ f(x) = -4x + 5 \ ; \ x \leq \frac{5}{4} \end{cases}$$

• دراسة استمرارية f عند $\frac{5}{4}$:

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \left|4 \times \frac{5}{4} - 5\right| = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{5}{4} \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{5}{4} \\ >}} (4x - 5) = 0 = f\left(\frac{5}{4}\right)$$

ومنه f مستمرة عند $\frac{5}{4}$ من اليمين

$$\lim_{\substack{x \to \frac{5}{4} \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{5}{4} \\ <}} (-4x + 5) = 0 = f\left(\frac{5}{4}\right)$$

ومنه f مستمرة عند $\frac{5}{4}$ من اليسار ؛ وعليه f مستمرة عند $\frac{5}{4}$.

• دراسة استمرارية f على المجال $\left]\frac{5}{4} ; +\infty\right[$: $f(x) = 4x - 5$

الدالة f هي دالة كثيرة حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ ومنه فهي مستمرة على المجال : $\left]\frac{5}{4} ; +\infty\right[$.

• دراسة استمرارية f على المجال $\left]-\infty ; \frac{5}{4}\right[$: $f(x) = -4x + 5$.

الدالة f هي دالة كثيرة حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ ومنه فهي مستمرة على المجال : $\left]-\infty ; \frac{5}{4}\right[$.

مما سبق : f مستمرة عند $\frac{5}{4}$ ومستمرة على كل من المجالين :

$\left]-\infty ; \frac{5}{4}\right[$ و $\left]\frac{5}{4} ; +\infty\right[$ فهي مستمرة إذن على $\mathbb{R}$.

التمرين 4 : --

- دراسة استمرارية f عند 0 :

$D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x\to0} 4 \times \frac{\sin 4x}{4x} = 4 \times 1 = 4$$

ومنه : $\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$ ؛ إذن الدالة f مستمرة عند 0 .

- دراسة استمرارية f على $\mathbb{R}$

الدالة : $x \mapsto 4x$ دالة كثيرة حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$.

الدالة $x \mapsto \sin x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ وعليه :

الدالة $x \mapsto \sin 4x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ مركب دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$.

الدالة $x \mapsto x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة حدود و عليه :

الدالة $x \mapsto \frac{\sin 4x}{x}$ مستمرة على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $]0 ; +\infty[$ لأنها حاصل قسمة دالتين مستمرتين .

وبما أن الدالة f مستمرة عند 0 فهي مستمرة على $\mathbb{R}$.

التمرين 5 : --

دراسة استمرارية f على $\mathbb{R}$

• الاستمرارية عند 3 : $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x\to3} \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = \lim_{x\to3} (x-2) = 1$$

ومنه $\lim_{x\to3} f(x) = f(3)$ وعليه f مستمرة عند 3

• الاستمرارية على $\mathbb{R}$

الدالة f هي حاصل قسمة دالتي كثير حدود فهي مستمرة على كل من المجالين $]-\infty ; 3[$ و $]3 ; +\infty[$ وبما أن f مستمرة عند 3 فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$.

التمرين 6 : --

- تعيين b بحيث تكون f مستمرة على $\mathbb{R}$

• لما : $x \geq 0$: $f(x) = 2x^2 + 1$

وهي دالة كثيرة حدود ومنه فهي مستمرة على $]0 ; +\infty[$ لأنها مستمرة على $\mathbb{R}$

• لما : $x < 0$: $f(x) = 4x + b$

وهي دالة كثيرة حدود فهي مستمرة على $]-\infty ; 0[$ لأنها مستمرة على $\mathbb{R}$.

• الاستمرارية عند 0 : $f(0) = 2(0)^2 + 1 = 1$

$$\lim_{\substack{x\to0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0 \\ >}} 2x^2 + 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0 \\ <}} 4x + b = b$$

حتى تكون f مستمرة عند 0 يجب أن يكون : $b = 1$ وآنذاك تكون f مستمرة على $\mathbb{R}$.

التمرين 7 : --

- تعيين a و b : $D_f = \mathbb{R}$

• لما : $x < 1$: $f(x) = 3x - 5$ وعليه f مستمرة على $]-\infty ; 1[$ لأنها دالة كثير حدود .

• لما : $1 < x < 4$: $f(x) = ax + 2$ وعليه : f مستمرة على $]1 ; 4[$ لأنها دالة كثيرة حدود .

• لما : $x > 4$: $f(x) = x^2 + 4$ وعليه f : مستمرة على $]4 ; +\infty[$ لأنها دالة كثيرة حدود .

• الاستمرارية عند 1 : $f(1) = a(1) + 2 = a + 2$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ <}} 3x - 5 = -2$$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ >}} ax + 2 = a + 2$$

ومنه تكون f مستمرة عند 1 إذا كان : $a + 2 = -2$ وبالتالي : $a = -4$.

• الاستمرارية عند4 : $f(4) = (4)^2 + b = 16 + b$

$$\lim_{\substack{x\to4 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to4 \\ <}} ax + 2 = 4a + 2 = 4(-4) + 2 = -14$$

$$\lim_{\substack{x\to4 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to4 \\ >}} x^2 + b = 16 + b$$

وعليه : $16 + b = -14$ ومنه : $b = -30$.

وبالتالي تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ إذا كانت مستمرة على كل من المجالات $]-\infty ; 1[$ و $]1 ; 4[$ و $]4 ; +\infty[$ ومستمرة عند 1 و 4 وبالتالي : $b = -30$ و $a = -4$

التمرين 8 : --

- عدد حلول المعادلة : $f(x) = 0$

• في المجال $[-5 ; 2]$: الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما

• ولدينا : $f(-5) = -2$ و $f(2) = 1$ وعليه : $f(-5) \times f(2) < 0$.

وعليه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-5 ; 2[$.

• في المجال $[2 ; 5]$ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما و لدينا : $f(2) = 1$ و $f(5) = -3$ وعليه $f(2) \times f(5) < 0$. وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]2 ; 5[$.ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حلين في المجال $[-5 ; 2]$.

التمرين 9 : --

- عدد حلول المعادلة : $f(x) = -1$

• في المجال $]-\infty ; 1]$: الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما

ولدينا : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ و $f(1) = -3$

وعليه : للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد في المجال $]-\infty ; 1[$.

• في المجال : $[1 ; +\infty[$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما ولدينا : $f(1) = -3$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$. وعليه للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد في $]1 ; +\infty[$

وعليه للمعادلة $f(x) = -1$ حلين في $\mathbb{R}$.

التمرين 10 : --

1- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

• $D_f =]-\infty : +\infty[$

• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$

• $f'(x) = 4x^4 - 4 = 4(x^3 - 1)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]1 ; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty ; 1]$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-13	↗	$+\infty$

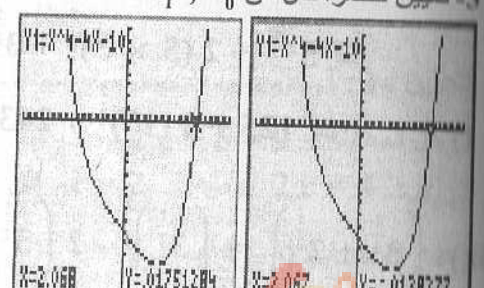
2- استنتاج عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

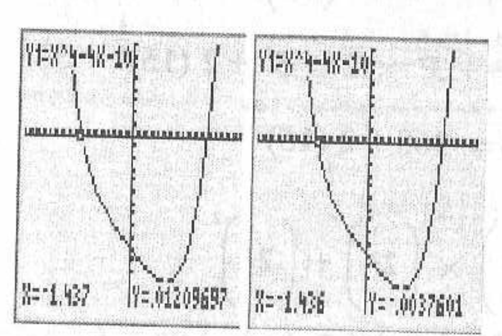
• في المجال $]-\infty ; 1]$ لدينا : $f(1) = -13$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ و f مستمرة و متناقصة تماما ومنه يوجد عدد وحيد x_0 بحيث : $f(x_0) = 0$

• في المجال $[1 ; +\infty[$ لدينا : $f(1) = -13$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و f مستمرة و متزايدة تماما ومنه يوجد عدد وحيد x_1 بحيث : $f(x_1) = 0$

• إذن للمعادلة حلين x_0 , x_1 .

3- تعيين حصرا لكل من x_0 , x_1 :





باستعمال الآلة البيانية نمثل بيان الدالة ثم باستعمال الزر TRACE يظهر مؤشر يعطي إحداثيات نقطة من المنحنى نحرك المؤشر يمينا ثم يسارا فتظهر قيمة مقربة لكل من x_0 , x_1 وعليه يمكن حصرهما كما يلي :

$-1,437 < x_0 < -1,436$ و $2,067 < x_1 < 2,068$

التمرين 11 : --

- إثبات أن المعادلة $\cos x = x$ تقبل حلا :

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \cos x - x$

• الدالة f تقبل حلا وحيد في المجال $[0 ; 1]$

معناه : f مستمرة ورتيبة تماما على $[0 ; 1]$ و $f(0) \times f(1) < 0$

- الدالة f مستمرة على $[0 ; 1]$ لأنها مجموع دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$.

- لدينا : $f'(x) = -\sin x - 1$. وعليه لدينا : $\sin x > 0$ في المجال $[0 ; \pi]$.

ومنه : $\sin x > 0$ في المجال $]0 ; 1[$.وبالتالي : $-\sin x < 0$ في المجال $]0 ; 1[$

وبالتالي : $f'(x) < 0$ في المجال $]0 ; 1[$. إذن : f متناقصة تماما على المجال $]0 ; 1[$.- ولدينا : $f(0) = 1$ و $f(1) = \cos 1 - 1$

ونعلم $\cos x \leq 1$ من أجل $x = \mathbb{R}$. ومنه : $f(1) < 0$ و $f(0) > 0$.

إذن : $f(0) . f(1) < 0$.

وبالتالي حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد $x_0 \in]0\,;1[$ بحيث

$f(x_0)=0$ ومنه : للمعادلة $\cos x - x = 0$ حلا وحيدا أي $\cos x_0 = x_0$.

التمرين 12 : --

النشر :

$$A = \left(5^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{5}{2}}\right)^2 = \left(5^{\frac{3}{2}}\right)^2 + 2\left(5^{\frac{3}{2}}\right).\,3^{\frac{5}{2}} + \left(3^{\frac{5}{2}}\right)^2$$

$$= 5^{\frac{3}{2}\times 2} + 2\,(5\times 3)^{\frac{5}{2}} + 3^{\frac{5}{2}} + 3^{\frac{5}{2}} \times 2 = 5^3 + 2\,(15)^{\frac{5}{2}} + 3^5$$

$$= 125 + 2\,(15)^{\frac{5}{2}} + 243 = 368 + 2\,(15)^{\frac{5}{2}}$$

$$B = \left(3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2\left(3^{\frac{1}{2}}\right) \times \left(2^{\frac{1}{2}}\right) + \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$= 3 - 2\,(3\times 2)^{\frac{1}{2}} + 2 = 5^3 + 2\,(15)^{\frac{5}{2}} + 3^5 = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$C = \left(5^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}\right)\left(5^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}\right) = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5 - 3 = 2$$

$$D = \left(3^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 3\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 \times \left(2^{\frac{1}{3}}\right) + 3\left(3^{\frac{1}{3}}\right) \times \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$= 3 - 3 \times 3^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} + 3\left(3^{\frac{1}{3}}\right) \times 2^{\frac{2}{3}} - 2$$

$$= 1 - 3^{1+\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} + 3^{1+\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 1 - 3^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}}$$

التمرين 13 : --

التبسيط :

- $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{36} = 6^{\frac{1}{3}} \times (36)^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{3}}\,(6)^{\frac{1}{3}}$

$$= 6^{\frac{1}{3}} \times 6^{\frac{2}{3}}$$

$$= 6^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 6$$

- $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[5]{2} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right) \times \left(2^{\frac{1}{5}}\right) = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{6}{5}}$

- $\sqrt[2]{27} \times \sqrt[3]{9} = (27)^{\frac{1}{2}} \times 9^{\frac{1}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(3^2\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{2}{3}}$

$$= 3^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}} = 3^{\frac{9+4}{6}} = 3^{\frac{13}{6}}$$

التمرين 14 : --

1) حل المعادلة : $2x + 5 = 9$

أي : $2x = 4$ ومنه : $x = 2$ إذن : $S = \{2\}$.

2) حل المعادلة : $2x^2 + 5 = 9$

أي : $2x^2 = 4$ ومنه : $x^2 = 2$ وعليه : $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$

إذن : $S = \{-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\}$.

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2x^3 + 5 = 9$

$2x^3 + 5 = 9$ معناه : $2x^3 = 4$ ومنه : $x^3 = 2$

وعليه : $x = \sqrt[3]{2}$ إذن : $S = \{\sqrt[3]{2}\}$.

4) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2x^4 + 5 = 9$

أي : $2x^4 = 4$ ومنه : $x^4 = 2$ وبالتالي : $x = \sqrt[4]{2}$ أو $x = -\sqrt[4]{2}$

إذن : $S = \{-\sqrt[4]{2}\,;\,\sqrt[4]{2}\}$.

5) استنتاج حلول المعادلة : $2x^n + 5 = 9$

- من أجل n زوجي مجموعة الحلول هي : $S = \{-\sqrt[n]{2}\,;\,\sqrt[n]{2}\}$.
- من أجل n فردي مجموعة الحلول : $S = \{\sqrt[n]{2}\}$.

التمرين 15 : --

1) مجموعة التعريف :

لدينا من أجل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$: $f(x) = x^3 - x - \frac{|x-1|}{x-1}$

وعليه الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$

لكن $f(1) = -1$ ومنه f معرفة عند 1 و بالتالي $D_f = \mathbb{R}$.

2) دراسة استمرارية f عند 1 :

• كتابة f دون رمز القيمة المطلقة :لدينا:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - x - \frac{x-1}{x-1} ; x > 1 \\ f(x) = x^3 - x - \frac{-(x-1)}{x-1} ; x < 1 \\ f(1) = -1 \end{cases} \text{ومنه:} \begin{cases} f(x) = x^3 - x - 1 ; x > 1 \\ f(x) = x^3 - x + 1 ; x < 1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} x^3 - x - 1 = -1 = f(1)$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} x^3 - x + 1 = 1$$

ومنه f لا تقبل نهاية عند 1 . وبالتالي f غير مستمرة عند 1 لكنها مستمرة عند 1 من اليمين .

3) دراسة الاستمرارية على D_f

• في المجال $]1 ; +\infty[$: $f(x) = x^3 - x - 1$ ومنه f دالة كثيرة حدود فهي مستمرة.

• في المجال $]-\infty ; 1[$: $f(x) = x^3 - x + 1$ ومنه f دالة كثيرة حدود فهي مستمرة.

لكن f غير مستمرة عند 1 فهي غير مستمرة على $\mathbb{R}$.

غير أن f *مستمرة على كل من المجالين* $]-\infty ; 1[$ و $[1 ; +\infty[$.

4) إثبات أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا في المجال $]1 ; \frac{3}{2}[$.

• الدالة f مستمرة على $[1 ; +\infty[$ وعليه فهي مستمرة على $[1 ; \frac{3}{2}]$.

• ولدينا : $f(1) = -1$ و $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}$. ومنه $f(1) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$

وعليه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد x_0 / $x_0 \in \left]1 ; \frac{3}{2}\right[$

و $f(x_0) = 0$.إذن للمعادلة $f(x) = 0$ على الأقل حل في المجال $\left]1 ; \frac{3}{2}\right[$.

التمرين 16 : ------------------------------------

إثبات وجود الحل :

بوضع : $f(x) = -\sin x + \frac{1}{4}\cos x$

• في المجال $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ الدالة f مستمرة لأنها مجموع و جداء دوال مستمرة على $\mathbb{R}$.

• ولدينا : $f(0) = -\sin 0 + \frac{1}{4}\cos 0 = \frac{1}{4}$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{-4\sqrt{2} + \sqrt{2}}{8} = -\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

وعليه : ومنه يوجد على الأقل عدد a / $a \in \left]0 ; \frac{\pi}{4}\right[$ و $f(a) = 0$

أي أن المعادلة : $-\sin x + \frac{1}{4}\cos x = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $\left]0 ; \frac{\pi}{4}\right[$.

التمرين 17 : ------------------------------------

إثبات وجود λ :

ندرس حالتين :

1) إذا كان: $f(a) < f(b)$ بضرب الطرفين في α نجد : $\alpha f(a) < \alpha f(b)$

وبإضافة $\beta f(b)$ إلى طرفي المتباينة نجد :

$$\alpha f(a) + \beta f(b) < \alpha f(b) + \beta f(b)$$

ومنه : $\alpha f(a) + \beta f(b) < (\alpha + \beta) f(b)$ وبالتالي :

$$\frac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta} < f(b) \ldots (1)$$

لدينا : $f(b) > f(a)$ بضرب الطرفين في β نجد : $\beta f(b) > \beta f(a)$

وبإضافة $\alpha f(a)$ إلى طرفي المتباينة نجد :

$$\alpha f(a) + \beta f(b) > \alpha f(a) + \beta f(a)$$

ومنه : $\alpha f(a)+\beta f(b) > (\alpha+\beta) f(a)$

أي أن : $\dfrac{\alpha f(a)+\beta f(b)}{\alpha+\beta} > f(a) \dots (2)$

من (1) و (2) : $f(a) < \dfrac{\alpha f(a)+\beta f(b)}{\alpha+\beta} < f(b)$

وحسب نظرية القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد λ من المجال $]a\ ;\ b[$

بحيث : $\dfrac{\alpha f(a)+\beta f(b)}{\alpha+\beta} = f(\lambda)$.

إذن : $\alpha f(a)+\beta f(b) = (\alpha+\beta) f(\lambda)$.

2) إذا كان : $f(a) > f(b)$: نفس طريقة الحل السابقة .

التمرين 18 : --

لدينا : $f(x) = \sin x + \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}$ من أجل : $x \neq 0$.

• $D_f = \left\{x \in \left[\dfrac{-\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right] : 1-\cos 2x \geq 0 \text{ و } \sin x \neq 0\right\}$

لدينا : $\sin x \neq 0$ معناه $x \neq 0$.

$1-\cos 2x \geq 0$ معناه : $\cos 2x \leq 1$ وهذا محقق دوما في المجال $\left[\dfrac{-\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$. ومنه f معرفة على $\left[\dfrac{-\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$.

وبما أن $f(0)=\sqrt{2}$ فإن f معرفة على $\left[\dfrac{-\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

• تبسيط $f(x)$:

$$\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{1-(1-2\sin^2 x)} = \sqrt{2\sin^2 x}$$

$$\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}\,|\sin x|$$

ومنه :
$$\begin{cases} f(x) = \sin x + \dfrac{\sqrt{2}\,|\sin x|}{\sin x} \\ f(0) = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \sin x + \sqrt{2} & ; x \geq 0 \\ f(x) = \sin x - \sqrt{2} & ; x \leq 0 \\ f(0) = \sqrt{2} \end{cases}$$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sin x + \sqrt{2} = \sqrt{2}$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \sin x - \sqrt{2} = -\sqrt{2}$

ومنه الدالة f غير مستمرة عند 0 .

التمرين 19 : --

1- تعيين مجموعة التعريف :

لدينا : $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 2\tan x}{\cos 2x}$; $x \neq \dfrac{\pi}{4}$

$D_f = \left\{x \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right] : \cos x \neq 0 \text{ و } \cos 2x \neq 0\right\}$

$\cos x = 0$ معناه : $x = \dfrac{\pi}{2}$ أي $\cos 2x = 0$ معناه : $2x = \dfrac{\pi}{2}$ أي :

لكن : $x = \dfrac{\pi}{4}$: $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ وعليه : $D_f = \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$

2- دراسة استمرارية f عند $\dfrac{\pi}{4}$:

• $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\dfrac{1}{\cos x^2} - \dfrac{2\sin x}{\cos x}}{\cos 2x}$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-2\sin x\cos x}{\cos^2 x\cos 2x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\sin 2x}{\cos^2 x\cos 2x}$

بوضع : $x - \dfrac{\pi}{4} = z$ أي $x = \dfrac{\pi}{4} + z$. لما : $x \longrightarrow \dfrac{\pi}{4}$ فإن : $z \longrightarrow 0$

وعليه :

$$\bullet \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{z\to 0} \frac{1-\sin 2\left(\frac{\pi}{4}+z\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+z\right)\cos 2\left(\frac{\pi}{4}+z\right)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1-\sin\left(2z+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+z\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+2z\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos 2z}{-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+z\right)\sin 2z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1-(1-2\sin^2 z)}{-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+z\right)\sin 2z} = \lim_{z\to 0} \frac{2\sin^2 z}{-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+z\right)\sin 2z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-2\sin z}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+z\right)\cos z} = 0 = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

ومنه f مستمرة عند $\frac{\pi}{4}$.

التمرين 20 :

I-1) حساب النهايات :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^3 - 1200x - 100 = -100$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left[1 - \frac{1200}{x^2} - \frac{100}{x^3}\right] = +\infty$$

2) دراسة اتجاه التغير :

لدينا : $g'(x) = 3x^2 - 1200$ ومنه : $g'(x) = 3(x^2 - 400)$

$g'(x) = 0$ معناه : $x = 20$ أو $x = -20$ (مرفوضة)

x	0		20		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	

وبالتالي g متزايدة تماما على المجال $[20 ; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[0 ; 20]$.

جدول التغيرات :

x	0		20		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	-100	↘	-16100	↗	$+\infty$

$$g(20) = (20)^3 - 1200(20) - 100 = -16100$$

3) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا :

• في المجال $[20 ; 40]$ الدالة g مستمرة لأنها دالة كثير حدود.

• لدينا : $g(20) = -16100$

$g(40) = (40)^3 - 1200(40) - 100 = 15900$

ومنه : $g(20) . g(40) < 0$

لدينا g متزايدة تماما على المجال $[20 ; 40]$ حسب نظرية القيم المتوسطة

يوجد عدد وحيد α من المجال $]20 ; 40[$ بحيث : $g(\alpha) = 0$

• تعيين قيمة مقربة للوحدة للعدد α.

باستعمال آلة بيانية نجد : $\alpha \simeq 35$.

4) استنتاج إشارة $g(x)$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

II - 1) حساب نهايات الدالة f :

$$\bullet \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}$$
$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x + 50 + \frac{1200}{x^2} + \frac{50}{x^2} = +\infty$$

2) تبيان أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

$$f'(x) = 1 + \frac{1200x^2 - 2x\,(1200x + 50)}{x^2} = \frac{x^4 + 1200x^2 - 2400x^2 - 110x}{x^4}$$

- وعليه : $f'(x) = \frac{x\left[x^3 - 1200x - 100\right]}{x^4} \quad \frac{x^3 - 1200x - 100}{x^3}$

إذن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

3) دراسة تغيرات الدالة f:

لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	
x^3	0	+		+	
$f'(x)$		-	0	+	

- جدول التغيرات :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$$f(\alpha) = \alpha + 50 + \frac{1200\,\alpha + 50}{\alpha^2} = \frac{\alpha^3 + 50\alpha^2 + 1200\alpha + 50}{\alpha^2}$$

لكن : $g(\alpha) = 0$ ومنه : $\alpha^3 - 1200\alpha - 100 = 0$

أي أن : $\alpha^3 = 1200\alpha + 100$

إذن : $f(\alpha) = \frac{1200\alpha + 100 + 50\alpha^2 + 1200\alpha + 50}{\alpha^2}$

أي أن : $f(\alpha) = \frac{50\alpha^2 + 2400\alpha + 150}{\alpha^2}$

Y1=(50X²+2400X+150)/(X²)
X=35 ...... Y=118.69388

باستعمال آلة بيانية نجد : $f(\alpha) \simeq 119$.

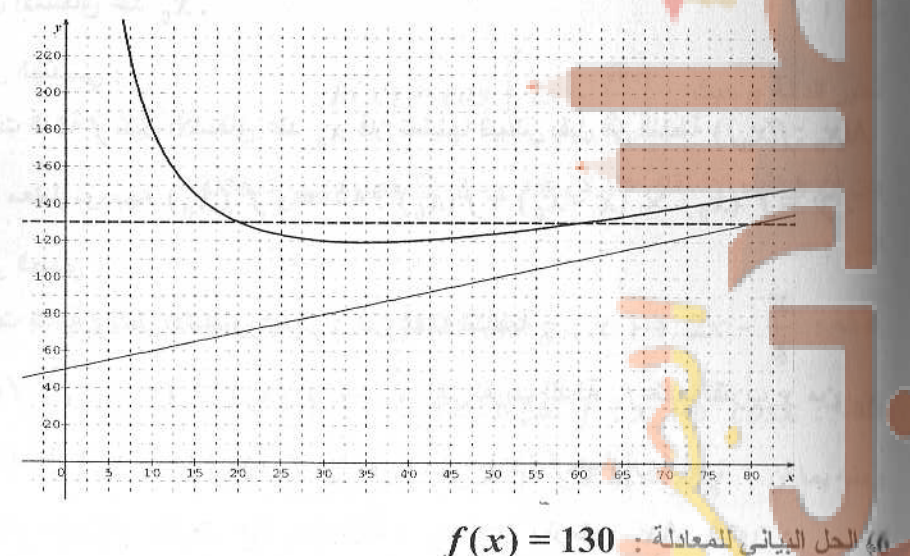
4) لدينا : $\lim_{|x| \to +\infty} \frac{1200x + 50}{x^2} = 0$

إذن (D) مستقيم مقارب مائل .

5) إنشاء (D) و (C) :

لدينا : $x = 0$ معادلة مستقيم مقارب.

وكذلك $y = x + 50$ معادلة مستقيم مقارب.



6) الحل البياني للمعادلة : $f(x) = 130$

بيانيا للمعادلة : $f(x) = 130$ حلين متمايزين هما بالتقريب 20 و 60 .

3 - الاشتقاقية

1- تعريف العدد المشتق :

f دالة معرفة على مجال مفتوح يشمل العدد x_0 .نقول عن الدالة f أنها تقبل الاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا كانت : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$

حيث ℓ عدد حقيقي ثابت ويدعى العدد المشتق للدالة f عند x_0 ونكتب : $f'(x_0)=\ell$.

ملاحظات :

1) بوضع $x-x_0=h$ نجد : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell$

2) إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ غير موجودة أو تساوي $+\infty$ أو $-\infty$ فإن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند x_0 .

التفسير الهندسي :

إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق عند x_0 فإن تمثيلها البياني يقبل في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماسا معامل توجيهه $f'(x_0)$ ومعادلته : $y=f'(x_0)\times(x-x_0)+f(x_0)$.

التفسير العددي :

إذا كانت الدالة f *تقبل الاشتقاق* عند x_0 فإن الدالة التآلفية :

$x\mapsto f'(x_0)\times(x-x_0)+f(x_0)$. هي تقريب للدالة f عندما تقترب x من x_0

ويكون لدينا $f(x)-f(x_0)\simeq f'(x_0)(x-x_0)$.حيث نرمز لـ :

$f(x)-f(x_0)$ بالرمز Δy. ونرمز لـ : $x-x_0$ بالرمز : Δx فيكون :

$\Delta y\simeq f'(x_0).\Delta x$.

2- الدالة المشتقة لدالة :

إذا كانت الدالة f تقبل لاشتقاق عند كل عدد x من المجال I نقول أن الدالة f تقبل الاشتقاق على I . نسمي الدالة المشتقة للدالة f الدالة التي نرمز لها بالرمز f' حيث :

$f':x\mapsto f'(x)$. العدد $f'(x)$ يكتب : $\frac{dy}{dx}$ إذن $f'(x)=\frac{dy}{dx}$.

ومنه : $dy=f'(x).dx$.

مبرهنة :

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند عدد x_0 فإنها مستمرة عند x_0.

ملاحظة : العكس غير صحيح .

مثلا الدالة $x\mapsto|x|$ مستمرة عند 0 لكنها غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

3- اشتقاق دالة مركبة :

مبرهنة :

إذا كانت الدالة g قابلة للاشتقاق عند عدد x_0 وكانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند $g(x_0)$ فإن الدالة fog تقبل الاشتقاق عند x_0 ويكون : $(fog)'(x_0)=f'[g(x_0)]\times g'(x_0)$.

مثال 1 :

نعتبر الدالة h حيث : $h(x)=cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

بين أن h تقبل الاشتقاق عند كل عدد x من $\mathbb{R}$ معينا دالتها المشتقة .

الحل :

الدالة : $g:x\mapsto 2x-\frac{\pi}{4}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة حدود.

الدالة : $f:x\mapsto cosx$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة مثلثية .

ومنه بما أن : $h=fog$.فإن h تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$h'(x)=f'[g(x)]\times g'(x)$.ومنه : $h'(x)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\times 2$

إذن : $h'(x)=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

مثال 2 :

مشتقة الدالة : $x \mapsto \sin(ax+b)$.

هي الدالة : $x \mapsto a\cos(ax+b)$ ؛ حيث a و b عددان حقيقيان .

4- مشتقات الدوال المألوفة :

الدالة	الدالة المشتقة	مجال الاشتقاق
$x \mapsto k$ k ثابت حقيقي	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n , n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{-n}{x^n} , n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*_+$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$

5- عمليات على المشتقات :

الدالة	الدالة المشتقة	ملاحظات
$f+g$	$f'+g'$	
kf	kf'	k ثابت حقيقي
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$	
$\frac{1}{f}$	$\frac{-f'}{f^2}$	$f(x) \neq 0$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$g(x) \neq 0$
f^n	$n \times f' \times f^{n-1}$	$n \in \mathbb{Q}$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$f(x) > 0$

6- المشتقات المتتابعة :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و دالتها المشتقة f' .إذاكانت دالتها المشتقة f' تقبل الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بالرمز f'' .

و هكذا نعرف الدالة المشتقة من الرتبة الثالثة ونرمز لها بالرمز : $f^{(3)}$ ويمكن تعريف الدوال المشتقة من مراتب عليا فنعرف الدالة المشتقة من الرتبة n ونرمز لها بالرمز $f^{(n)}$.

مثال :

المشتقات المتابعة للدالة $f : x \mapsto x^5 + 3x^3 - 5x + 2$ معرفة كما يلي :

$$f'(x) = 5x^4 + 9x^2 - 5 \quad ; \quad f''(x) = 20x^3 + 18x$$

$$f^{(3)}(x) = 60x^2 + 18 \quad ; \quad f^{(4)}(x) = 120x$$

$$f^{(5)}(x) = 120 \quad ; \quad f^{(6)}(x) = 0$$

ومنه من أجل $n \geq 6$: $f^{(n)}(x) = 0$.

7 – نقطة الانعطاف :

إذا انعدمت الدالة المشتقة الثانية $f^{(2)}$ للدالة f عند عدد x_0 مغيرة إشارتها فإن النقطة $A(x_0 ; f(x_0))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f .

8- اتجاه تغير دالة :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .

- تكون الدالة f ثابتة على I إذا وفقط إذا كانت f' معدومة على I .
- تكون الدالة f متزايدة تماما على I إذا وفقط إذا كانت f' موجبة تماما على I أو معدومة عند قيم معزولة من I .
- تكون الدالة f متناقصة تماما على I إذا وفقط إذا كانت f' سالبة تماما على I أو معدومة عند قيم معزولة من I .

9 – حل معادلات تفاضلية :

النوع الأول :

- $y' = f(x)$ وهو إيجاد دالة g حيث : $g'(x) = f(x)$.

مثال :

حل المعادلة التفاضلية : $y' = 2x + 4$.هو $y = x^2 + 4x + k$ حيث : k ثابت حقيقي .

النوع الثاني :

$y'' = f(x)$.وهو ايجاد دالة g حيث : $g''(x) = f(x)$.

مثال :

حل المعادلة التفاضلية : $y'' = 4x + 5$.

الحل

لدينا : $y' = 2x^2 + 5x + k$. ومنه : $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5x^2}{2} + kx + c$ حيث k و c عددان حقيقيان ثابتان

التمارين

التمرين 1 :

ضع العلامة √ أمام كل جملة صحيحة و العلامة × أمام كل جملة خاطئة .

1) إذا كانت : $\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=4$ فإن : $f'(3)=4$.

2) إذا كان : $f'(2)=3$ فإن f مستمرة عند 2.

3) إذا كانت : $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=3$ فإن : $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=3$.

4) إذا كنت : $\lim_{x\to0}f(x)=1$ فإن f تقبل الاشتقاق عند 0.

5) إذا كانت : $f(x)>0$ على مجال I فإن $f'(x)>0$ على I.

6) إذا كان : $f'(0)=2$ فإن : $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=2$.

7) توجد دالة f تقبل الاشتقاق عند عدد x_0 لكنها غير مستمرة عند x_0 .

8) توجد دالة f مستمرة عند عدد x_0 لكنها غير قابلة للاشتقاق عند x_0 .

9) إذا كانت f' موجبة تماما على كل من المجالين $]0\,;4[$ و $]4\,;7[$. و $f'(4)=0$ و $f'(7)$ فإن f متزايدة تماما على $[0\,;7]$.

10) إذا كانت f' سالبة تماما على كل من المجالين $]-\infty\,;-4[$ و $]4\,;+\infty[$ ومنعدمة على المجال $[-4\,;4]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

11) إذا كانت f غير قابلة للاشتقاق عند عدد x_0 فإن f غير مستمرة عند x_0.

12) إذا كانت الدالة f غير مستمرة عند عدد x_0 فإن f غير قابلة للاشتقاق عند x_0.

13) إذا كانت f دالة كثيرة حدود درجته n فإن الدالة المشتقة من الرتبة أي $f^{(n+1)}$ معدومة .

التمرين 2 :

ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند العدد x_0 في كل حالة ممايلي :

1) $x_0=2$; $f(x)=x^3-x^2+4$

2) $x_0=3$; $f(x)=x+3+\frac{5}{x-2}$

3) $x_0=0$; $f(x)=\sqrt{5-x}$

4) $x_0=\frac{3}{4}$; $f(x)=\sqrt{8x^2-10x+3}$

5) $x_0=4$; $f(x)=\frac{|x-4|+2x+4}{x+2}$

6) $x_0=4$; $\begin{cases} f(x)=x-\sqrt{x-4} & ;\, x\geq4 \\ f(x)=\frac{x^2-3x-6}{x-4} & ;\, x<4 \end{cases}$

التمرين 3 :

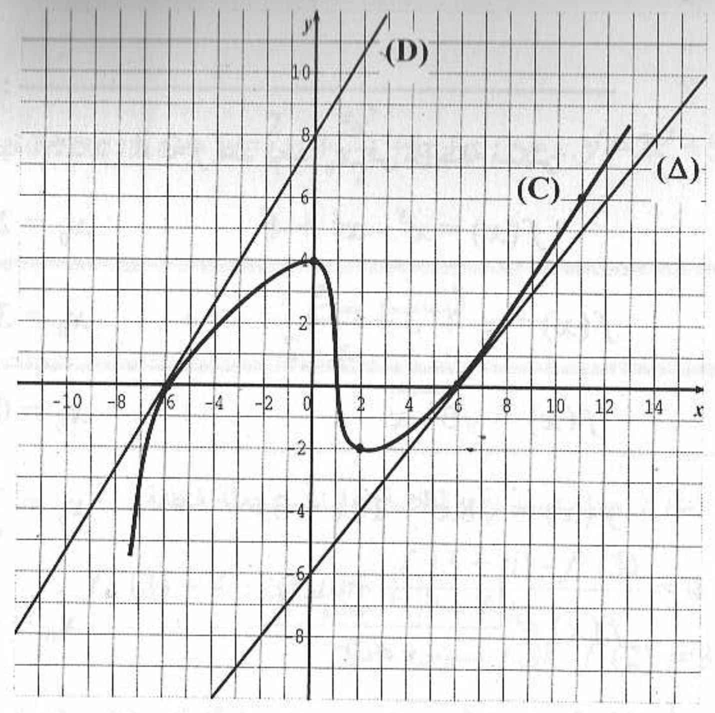
إليك التمثيل البياني (C) لدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ في معلم متعامد متجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ حيث (Δ) هو المماس للمنحنى (C) في النقطة A ذات الفاصلة 6

و (D) هو المماس للمنحنى (C) في النقطة B ذات الفاصلة -6 .

1) استنتج من البيان $f'(6)$ و $f'(-6)$.

2) استنتج كل من : $\lim_{x\to6}\frac{f(x)}{x-6}$ و $\lim_{x\to-6}\frac{f(x)}{x+6}$.

3) أكتب كل من معادلتي (Δ) و (D) .



التمرين 4 :

عين مجموعة تعريف الدالة f و المجموعة التي تقبل فيها الاشتقاق ثم أحسب دالتها المشتقة في كل حالة ممايلي :

1) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + x$

2) $f(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{5}{x} + 2$

3) $f(x) = \frac{4x}{x^2 - 1} + 5x$

4) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

5) $f(x) = \left(\frac{3x - 1}{x + 2}\right)^2$

6) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 1}$

7) $f(x) = \left(\sqrt{x} - 3\right)^2$

8) $f(x) = \sqrt{2x - 3} + x$

9) $f(x) = \frac{\sqrt{2x - 2}}{\sqrt{x + 3}}$

10) $f(x) = \sqrt{\frac{2x-2}{x+3}}$

11) $f(x) = cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin 2x$

12) $f(x) = \sin^4 x$

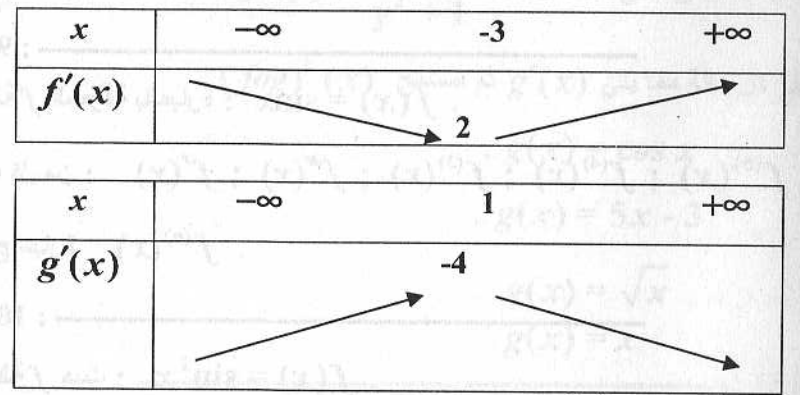
13) $f(x) = \frac{cosx}{\sin x - 1}$

14) $f(x) = \sqrt{2\sin^2 x + 1}$

15) $f(x) = \tan x - \sin x + 1$

التمرين 5 :

f و g دالتان تقبلان الاشتقاق على $\mathbb{R}$.اتجاه تغيرات كل من f' و g' معطاة في الجدولين الآتيين :



x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	↘	2	↗

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	↗	-4	↘

استنتج اتجاه تغير كل من الدالتين f و g .

التمرين 6 :

نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة $f(x) = 2x^2 - 4 + 4\,|x + 3|$.

1) ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0.

2) ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند -3.

التمرين 7 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2(x+2)^2}}{(x+2)\left(|x| + 2\right)} \; ; \; x \neq -2 \\ f(-2) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1) ادرس استمرارية الدالة f عند -2 .

2) ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند -2 .

التمرين 8 :

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$.

1) احسب $f^{(4)}(x)$.

2) استنتج $f^{(n)}(x)$.

التمرين 9 :

نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x) = \sin x$.

1) احسب كل من : $f'(x)$; $f''(x)$; $f^{(3)}(x)$; $f^{(4)}(x)$; $f^{(5)}(x)$.

2) استنتج عبارة $f^{(n)}(x)$.

التمرين 10 :

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \sin^2 x$.

بين انه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f''(x) + 4f(x) - 2 = 0$.

التمرين 11 :

نعرف الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$ بالعبارة : $f(x) = x^2 + \cos x$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f' على $[0 ; +\infty[$.

2) استنتج اتجاه تغير الدالة f على $[0 ; +\infty[$.

التمرين 12 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة f' على $\mathbb{R}$.

2) استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$.

3) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

التمرين 13 :

f دالة معرفة على المجال $]-2 ; 2[$ بالعبارة : $f(x) = (x + 4)\sqrt{4 - x^2}$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f على $]-2 ; 2[$.

2) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C) عند النقطة A ذات الفاصلة 0 .

3) ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المماس (Δ) .

التمرين 14 :

f دالة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(y) = \dfrac{1}{y^2 + 1}$.

أحسب في كل حالة مما يلي $g'(x)$ ثم استنتج $(fog)'(x)$.

1) $g(x) = \cos x$.

2) $g(x) = 5x - 3$.

3) $g(x) = \sqrt{x}$.

4) $g(x) = x$.

التمرين 15 :

I) نعتبر الدالة g المعرفة بالعبارة : $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) بين أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]2 ; \dfrac{5}{2}\right[$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة بالعباة : $f(x) = \dfrac{x^2 (x + 2)}{x^2 - 1}$

حيث (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 2cm)

1- عين D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم أحسب النهايات للدالة f عند أطرافها.

2- عين الأعداد الحقيقية a , b , c , d بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من D_f فإن : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx + d}{x^2 - 1}$.

3- بين أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب إعطاء معادلته.

4- ادرس الوضعية النسبية للمستقيم (Δ) و المنحنى (C) .

5- بين أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين .

6- بين أن إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارة $x \times g(x)$.

7- اكتب جدول تغيرات الدالة f.

8- أنشئ (C) باستعمال إحدى برمجيات التمثيل البياني .

التمرين 16 :

نعرف على $\mathbb{R}$ الدالة f بالعبارة : $f(x)=\dfrac{|x^2-3x|}{x+1}$.

1) عين مجموعة تعريف الدالة f.

2) اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

3) بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$ في كل حالة.

4) احسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$. ماذا تستنتج ؟

5) احسب $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)}{h}$. ماذا تستنتج ؟

6) ادرس تغيرات الدالة f.

7) ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=x-4$ مستقيم مقارب للمنحنى (C).

8) أنشئ (Δ) و (C).

9) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$|x^2-3x|=m(x+1)$ ؛ حل المعادلة من أجل $m=1$.

التمرين 17 :

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x)=2x+3-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين مجموعة التعريف D_f للدالة f.

2) بين أنه من أجل كل عدد x من D_f فإن: $f'(x)=\dfrac{2(x+2)(x^2+x+1)}{(x+1)^3}$.

3) ادرس تغيرات الدالة f.

4) بين أن المستقيم الذي معادلته : $y=2x+3$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C).

5) بين أن (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0

حيث : $\dfrac{-3}{8}<x_0<\dfrac{-1}{4}$.

6) اكتب معادلة المماس في النقطة ذات الفاصلة 0 .

7) أنشئ (C).

8) عين النقطة من (C) التي تكون إحداثياها أعدادا صحيحة.

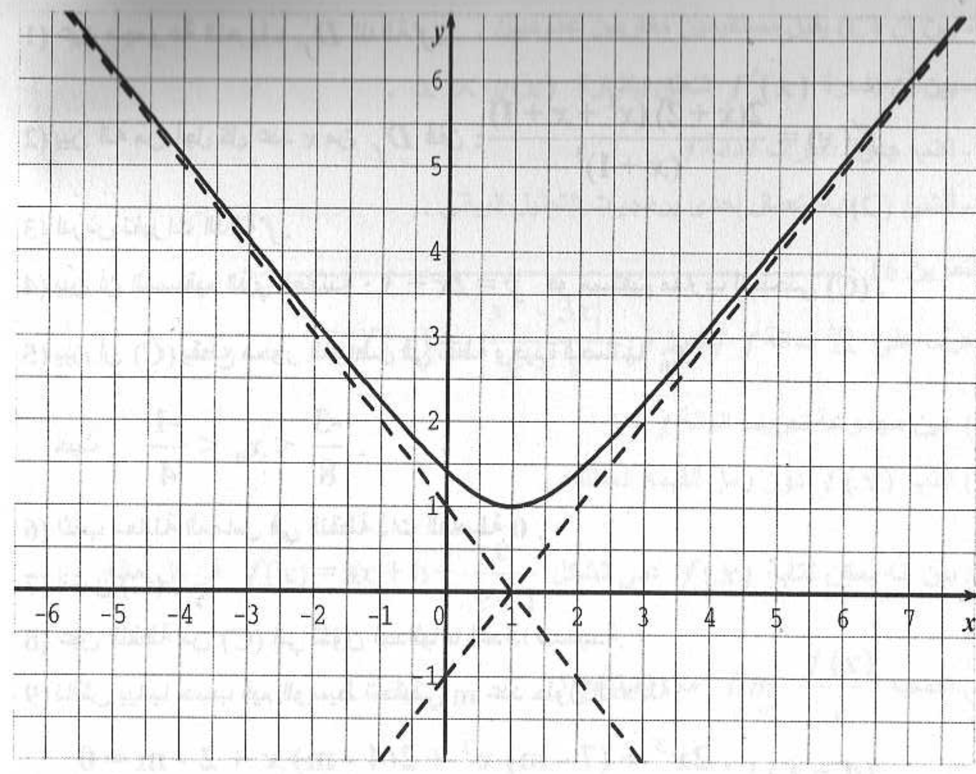
9) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$2x^3+(7-m)x^2+2(4-m)x+2-m=0$.

التمرين 18 :

ليكن (C) التمثيل البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

للدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$.



I) استنتج من خلال البيان :

1) اتجاه تغير الدالة f.

2) محور تناظر المنحنى (C) .

3) نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

4) معادلتي المستقيمين المقاربين المائلين و وضعيتهما بالنسبة إلى (C) .

II) برهن حسابيا على صحة النتائج السابقة.

التمرين 19 :

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1}$.

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$.

1) بين أنه من أجل كل x من مجموعة التعريف D_f فإن : $f'(x) = \dfrac{x^3(x-3)}{(x-1)^3}$.

2) بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx + d}{(x-1)^2}$.

حيث a , b , c, d أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

3) ادرس تغيرات الدالة f.

4) - بين أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل (Δ) .

- ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) .

5) بين أنه يوجد عدد حقيقي α من المجال $\left]\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{3}{4}\right[$ بحيث $f(\alpha) = 0$.

6) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C) عند النقطة $A(2\ ; f(2))$.

أنشئ (C) .

7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$f(x) - 2m = 0$.

8) لتكن g الدالة المعرفة بالعبارة : $g(x) = |x| - 2 + \dfrac{3|x| - 2}{(|x| - 1)^2}$

- عين D_g و بين أن g دالة زوجية .

- استنتج إنشاء تمثيلها البياني (C') في المعلم السابق .

الحلول

التمرين 1 :

(1 √   (2 √   (3 √   (4 ×   (5 ×

(6 √   (7 ×   (8 √   (9 √   (10 ×

(11 ×   (12 √   (13 √ .

التمرين 2 :

دراسة قابلية الاشتقاق عند x_0 (1 $x_0 = 2$; $f(x) = x^3 - x^2 + 4$.

لدينا : $f(2) = 8$ و $D_f = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{x^3-x^2+4-8}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to2}\frac{x^3-x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+x+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to2}(x^2+x+2) = 8$$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 2 حيث $f'(2) = 8$.

(2 $f(x) = x + 3 + \frac{5}{x-2}$; $x_0 = 3$.

لدينا : $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$; $f(3) = 11$.

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to3}\frac{x+3+\frac{5}{x-2}-11}{x-3}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{x-8+\frac{5}{x-2}}{x-3} = \lim_{x\to3}\frac{\frac{(x-8)(x-2)+5}{x-2}}{x-3}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-10x+21}{(x-3(x-2)} = \lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-7)}{(x-3(x-2)} = \lim_{x\to3}\frac{x-7}{x-2} = -4$$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 3 حيث $f'(3) = -4$.

(3 $D_f =]-\infty ; 5]$; $f(x) = \sqrt{5-x}$.

لدينا : $f(0) = \sqrt{5}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{5}}{x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\left[\sqrt{5-x}-\sqrt{5}\right]\left[\sqrt{5-x}+\sqrt{5}\right]}{x\left[\sqrt{5-x}+\sqrt{5}\right]}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{5-x-5}{x\left[\sqrt{5-x}+\sqrt{5}\right]} = \lim_{x\to0}\frac{-x}{x\left[\sqrt{5-x}+\sqrt{5}\right]}$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 0 حيث : $f'(0) = \frac{-\sqrt{5}}{10}$.

(4 $f(x) = \sqrt{8x^2-10x+3}$; $x_0 = \frac{3}{4}$.

لدينا : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 8x^2 - 10x + 3 \geq 0\}$.

ندرس إشارة : $8x^2 - 10x + 3$.

لدينا : $\Delta = (-10)^2 - 4(8)(3) = 100 - 96 = 4$.

ومنه : $x_1 = \frac{10-2}{16} = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{10+2}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$8x^2-10x+3$		+	0	-	0	+	

وبالتالي : $D_f = \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{4}\,;+\infty\right[$.

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $\frac{3}{4}$ لأنه لا ينتمي إلى مجال مفتوح معرفة عنده الدالة f.

لندرس قابلية الاشتقاق عند $\frac{3}{4}$ من اليمين :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{3}{4}} \frac{f(x)-f\left(\frac{3}{4}\right)}{x-\frac{3}{4}} = \lim_{x \xrightarrow{>} \frac{3}{4}} \frac{f(x)-f\left(\frac{3}{4}\right)}{x-\frac{3}{4}}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} \frac{3}{4}} \frac{\sqrt{8x^2-10x+3} \times \sqrt{8x^2-10x+3}}{\left(x-\frac{3}{4}\right)\sqrt{8x^2-10x+3}}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} \frac{3}{4}} \frac{8\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{8x^2-10x+3}} = +\infty$$

وعليه f لا تقبل الاشتقاق عند $\frac{3}{4}$ من اليمين .

5) $f(x) = \frac{|x-4|+2x+4}{x+2}\ ;\ x_0 = 4$.

لدينا : $f(4) = 2\ ;\ D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$.

كتابة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-4+2x+4}{x+2}\ ;\ x \geq 4 \\ f(x) = \dfrac{-x+4+2x+4}{x+2}\ ;\ x \leq 4 \end{cases}$$

وعليه :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{3x}{x+2}\ ;\ x \geq 4 \\ f(x) = \dfrac{x+8}{x+2}\ ;\ x \leq 4 \end{cases}$$

لدينا :

$$\bullet \lim_{x \xrightarrow{>} 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x \xrightarrow{>} 4} \frac{\frac{3x}{x+2}-2}{x-4}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 4} \frac{\frac{3x-2x-4}{x+2}}{x-4} = \lim_{x \xrightarrow{>} 4} \frac{x-4}{(x-2)(x-4)} = \frac{1}{6}$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 4 من اليمين.

$$\bullet \lim_{x \xrightarrow{<} 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x \xrightarrow{<} 4} \frac{\frac{x+8}{x+2}-2}{x-4}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{<} 4} \frac{\frac{x+8-2x-4}{x+2}}{x-4} = \lim_{x \xrightarrow{<} 4} \frac{-x+4}{(x+2)(x-4)}$$

و منه :

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x \xrightarrow{<} 4} \frac{-(x-4)}{(x-2)(x-4)}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{<} 4} \frac{-1}{x+2} = \frac{-1}{6}$$

وعليه f تقبل الاشتقاق عند 4 من اليسار لكن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 4.

6)

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x-4} \;;\; x \geq 4 \\ f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 6}{x - 4} \;;\; x < 4 \end{cases}$$

لدينا من أجل $x \geq 4$: $f(x) = x - \sqrt{x-4}$.

$x - 4 \geq 0$ وعليه : $x \in [4 ; +\infty[$.

و من أجل $x < 4$: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 6}{x - 4}$.

$x - 4 \neq 0$ وعليه : $x \in]-\infty ; 4[$.

وبالتالي مجموعة تعريف الدالة f : $D_f =]4 ; +\infty[\cup]-\infty ; 4[$.

إذن : $D_f = \mathbb{R}$.

ولدينا : $f(4) = 4 - \sqrt{4-4} = 4$.

$$\bullet \lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} \frac{x - \sqrt{x-4} - 4}{x - 4}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} \left(1 - \frac{\sqrt{x-4}}{x-4}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x-4}}\right) = -\infty$$

إذن f لا تقبل الاشتقاق عند 4 من اليمين.

$$\bullet \lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} \frac{\dfrac{x^2 - 3x - 6}{x - 4} - 4}{x - 4}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} \frac{\dfrac{x^2 - 3x - 6 - 4x + 16}{x - 4}}{x - 4} = \lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} \frac{x^2 - 7x + 10}{(x-4)^2} = -\infty$$

إذن f لا تقبل الاشتقاق عند 4 من اليسار و عليه f لا تقبل الاشتقاق عند 4 .

التمرين 3 : --

1) استنتاج $f'(6)$ و $f'(-6)$:

$f'(6)$ هو ميل المماس (Δ) ومنه : $f'(6) = \dfrac{3 - 0}{9 - 6}$ إذن : $f'(6) = 1$

$f'(-6)$ هو ميل المماس (D) ومنه : $f'(-2) = \dfrac{8 - 0}{0 - (-6)} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$.

2) حساب النهايات :

لدينا : $\lim_{x \to 6} \dfrac{f(x) - f(6)}{x - 6} = \lim_{x \to 6} \dfrac{f(x)}{x - 6} = f'(6) = 1$

$$\bullet \lim_{x \to -6} \frac{f(x) - f(-6)}{x - (-6)} = \lim_{x \to -6} \frac{f(x)}{x + 6} = f'(-6) = \frac{4}{3}$$

3) كتابة معادلة (Δ) : $(\Delta) : y = f'(6) \times (x - 6) + f(6)$

$(\Delta) : y = x - 6$

• كتابة معادلة (D) : $(D) : y = f'(-6) \times (x + 6) + f(-6)$

$(D) : y = \dfrac{4}{3} x + 8$

التمرين 4 : --

1) لدينا : $f(x) = \dfrac{3}{4} x^4 - \dfrac{5}{2} x^2 + x$.

ومنه : $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$ ، $f'(x) = 3x^3 - 5x + 1$.

2) لدينا : $f(x) = \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{5}{x} + 2$.

ومنه : $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1\,;\,0\}$.

$$f'(x) = \frac{-3}{(x+1)^2} + \frac{5}{x^2} \;.$$

3) لدينا : $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 - 1} + 5x$.

ومنه : $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1\,;\,1\}$.

$$f'(x) = \frac{-4x^2 - 4}{(x^2-1)^2} + 5 = \frac{5x^4 - 14x^2 + 1}{(x^2-1)^2}$$

4) لدينا : $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

ومنه : $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} - \{-2\,;\,2\}$ ؛ $f'(x) = \dfrac{-8x}{(x^2-4)^2}$.

5) لدينا : $f(x) = \left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right)^2$.

ومنه : $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} - \{-2\}$.

$$f'(x) = 2 \times \frac{3(x+2) - 1\,(3x-1)}{(x+2)^2} \times \left(\frac{3x-1}{x+2}\right)$$

$$f'(x) = 2 \times \frac{(7) \times (3x-1)}{(x+2)^3} = \frac{14\,(3x-1)}{(x+2)^3}$$

6) لدينا : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 4}{x - 1}$.

ومنه : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \;;\; x - 1 \neq 0\}$.

$D_f = [0\,;\,1[\;\cup\;]1\,;\,+\infty[$.

$D_{f'} =]0\,;\,1[\;\cup\;]1\,;\,+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\,(x-1) - 1\,(\sqrt{x} - 4)}{(x-1)^2} = \frac{-x + 8\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}\,(x-1)^2}$$

7) لدينا : $f(x) = \left(\sqrt{x} - 3\right)^2$.

ومنه : $D_f = [0\,;\,+\infty[\;;\; D_{f'} =]0\,;\,+\infty[$.

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 3\right) = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}}$$

8) لدينا : $f(x) = \sqrt{2x - 3} + x$.

ومنه : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 3 \geq 0\}$

إذن : $D_f = \left[\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$ ؛ $D_{f'} = \left]\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-3}} + 1 = \frac{1 + \sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}}$$

9) لدينا : $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-2}}{\sqrt{x+3}}$.

ومنه : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 2 \geq 0 \;;\; x + 3 > 0\}$

إذن : $D_f = [1\,;\,+\infty[$ ؛ $D_f' =]1\,;\,+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x-2}} \times \sqrt{x+3} - \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \times \sqrt{2x-2}}{x+3}$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x-2}} - \dfrac{\sqrt{2x-2}}{2\sqrt{x+3}}}{x+3}$$

ومنه : $. \; f'(x) = \dfrac{8}{2(x+3)\sqrt{2x-2}\;\sqrt{x+3}}$

10) لدينا : $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-2}{x+3}}$

ومنه : $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{2x-2}{x+3} \geq 0 \; ; \; x+3 \neq 0\right\}$

$$D_f =]-\infty \, ; -3[\; \cup \; [1 \, ; +\infty[$$

$$D_{f'} =]-\infty \, ; -3[\; \cup \;]1 \, ; +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2(x+3) - 1\,(2x-2)}{(x+3)^2}}{2\sqrt{\dfrac{2x-2}{x+3}}} = \frac{\dfrac{8}{(x+3)^2}}{2\sqrt{\dfrac{2x-2}{x+3}}}$$

ومنه : $. \; f'(x) = \dfrac{4}{(x+3)^2\sqrt{\dfrac{2x-2}{x+3}}}$

11) لدينا : $. \; f(x) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin 2x$

ومنه : $. \; D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2 \times \left[-\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right] + 2\cos 2x$$

إذن : $. \; f'(x) = -2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\cos 2x$

12) لدينا : $f(x) = \sin^4 x$. ومنه : $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$.

$$. \; f'(x) = 4\cos x \, . \, \sin^3 x$$

13) لدينا : $. \; f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x - 1}$

ومنه : $. \; D_f = \{x \in \mathbb{R} : \sin x - 1 \neq 0\}$

$\sin x - 1 = 0$ معناه : $\sin x = 1$ وعليه : $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

إذن : $. \; D_f = D_{f'} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \, , k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$f'(x) = \frac{-\sin x(\sin x - 1) - \cos x \, . \cos x}{(\sin x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin^2 x + \sin x - \cos^2 x}{(\sin x - 1)^2} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin x}{(\sin x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1 + \sin x}{(\sin x - 1)^2} = \frac{1}{\sin x - 1}$$

14) لدينا : $. \; f(x) = \sqrt{2\sin^2 x + 1}$

ومنه : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2\sin^2 x + 1 \geq 0\}$

$2\sin^2 x + 1 \geq 0$ معناه : $\sin^2 x \geq -\dfrac{1}{2}$

وهذا محقق ومنه : $. \; D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$

$$. \; f'(x) = \frac{4\cos x \; \sin x}{2\sqrt{2\sin^2 x + 1}} = \frac{2\cos x \; \sin x}{\sqrt{2\sin^2 x + 1}}$$

15) لدينا : $f(x) = \tan x - \sin x + 1$

ومنه : $D_f = D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\}$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$: معناه $\cos x = 0$

إذن : $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} - \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos x$.

التمرين 5 : --

استنتاج اتجاه تغير كل من الدالتين f و g :

- من جدول التغيرات:الدالة f' موجبة تماما على كل من المجالين $]-\infty \; ; -3[$ و $]-3 \; ; +\infty[$ ومنه f متزايدة تماما على كل من هذين المجالين.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗

- من جدول تغيرات g' نلاحظ أن $g'(x)$ سالب على كل من المجالين $]-\infty \; ; 1[$ و $]1 \; ; +\infty[$ ومنه g متناقصة تماما على كل من هذين المجالين.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	-
$g(x)$	↘

التمرين 6 : --

1) $D_f = \mathbb{R}$

- كتابة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 4 + 4(x+3) \; ; \; x \geq -3 \\ f(x) = 2x^2 - 4 - 4(x+3) \; ; \; x \geq -3 \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + 4x + 8 \; ; \; x \geq -3 \\ f(x) = 2x^2 - 4x - 16 \; ; \; x \geq -3 \end{cases}$$

2) قابلية الاشتقاق عند 0 :

$f(0) = 2(0)^2 - 4 + 4\,|0+3| = -4 + 12 = 8$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2 + 4x + 8 - 8}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2 + 4x}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x(x+2)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 2(x+2) = 4$

ومنه f تقبل الاشتقاق عند 0 حيث $f'(0) = 4$.

3) قابلية الاشتقاق عند -3 :

$f(-3) = 2(-3)^2 - 4 + 4\,|-3+3| = 14$

- $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to -3}} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to -3}} \frac{2x^2 - 4x - 16 - 14}{x+3}$

$= \lim\limits_{\substack{< \\ x\to -3}} \frac{2x^2 - 4x - 30}{x+3} = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to -3}} \frac{(x+3)(2x-10)}{x+3} = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to -3}} (2x - 10) = -16$

- $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -3}} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to -3}} \frac{2x^2 + 4x + 8 - 14}{x+3} = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to -3}} \frac{2x^2 + 4x - 6}{x+3}$

$= \lim\limits_{\substack{> \\ x\to -3}} \frac{(x+3)(2x-2)}{x+3} = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to -3}} 2x - 2 = -8$

وعليه f لا تقبل الاشتقاق عند -3 .

التمرين 7 : --

تبسيط $f(x)$:

من أجل $x \neq 2$ $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 (x+2)^2}}{(x+2)(|x|+2)}$ معرف على : $\mathbb{R} - \{-2\}$

لكن : $f(-2) = \frac{1}{2}$ ومنه : $D_f = \mathbb{R}$.

إذن : $f(x) = \frac{|x| \cdot |x+2|}{(x+2) \cdot (|x|+2)}$

لدينا :

x	$-\infty$ ... -2	-2 ... 0	0 ... $+\infty$
$\lvert x\rvert$	$-x$	$-x$	x
$\lvert x+2\rvert$	$-(x+2)$	$x+2$	$x+2$

وبالتالي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x\,[-(x+2)]}{(x+2)(-x+2)} \; ; \; x \le -2 \\ f(x) = \dfrac{-x\,(x+2)}{(x+2)(-x+2)} \; ; \; -2 < x \le 0 \\ f(x) = \dfrac{x\,(x+2)}{(x+2)(x+2)} \; ; \; x \ge 0 \\ f(-2) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{-x+2} \; ; \; x < -2 \\ f(x) = \dfrac{x}{x-2} \; ; \; -2 < x \le 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{x+2} \; ; \; x \ge 0 \\ f(-2) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1) دراسة استمرارية الدالة f عند -2 :

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{x}{-x+2} = \frac{-1}{2} \qquad \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{x}{x-2} = \frac{1}{2}$$

إذن f لا تقبل نهاية عند -2 ومنه f غير مستمرة عند -2 .

2- قابلية الاشتقاق عند -2 :

بما أن f غير مستمرة عند -2 فإن f غير قابلة للاشتقاق عند -2.

التمرين 8 : --

حساب $f^{(4)}(x)$:

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \; ; \; f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \; ; \; f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(x-1)^4}$$

ومنه :

$$f^{(3)}(x) = \frac{(-1)^3 \times 3 \times 2 \times 1}{(x-1)^4}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{+24}{(x-1)^5} = \frac{(-1)^4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(x-1)^5}$$

استنتاج $f^{(n)}(x)$:

نلاحظ أن : $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \times n!}{(x-1)^{n+1}}$.

التمرين 9 : --

- حساب $f^{(5)}(x) \; ; \; f^{(4)}(x) \; ; \; f^{(3)}(x) \; ; \; f''(x) \; ; \; f'(x)$:

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin(\pi + x)$$

$$f''(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right)$$

$$f^{(3)}(x) = \cos x\,(\pi + x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi + x\right)$$

$$f^{(3)}(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

$$f^{(4)}(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + x\right)$$

$$f^{(4)}(x) = \sin\left(\frac{4\pi}{2} + x\right)$$

$$f^{(5)}(x) = \cos\left(\frac{4\pi}{2}+x\right)$$

$$f^{(5)}(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{2}+x\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)$$

استنتاج: لدينا مما سبق : $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$

التمرين 10 : --

- تبيان أن : $f''(x) + 4f(x) - 2 = 0$

لدينا : $f(x) = \sin^2 x$ ومنه : $f'(x) = 2\cos x.\sin x$

وبالتالي : $f''(x) = 2\left[-\sin x . \sin x + \cos x . \cos x\right]$

$$= 2(-\sin^2 x + \cos^2 x)$$

ومنه : $f''(x) + 4f(x) - 2 = 2(-\sin^2 x + \cos^2 x) + 4\sin^2 x - 2$

$$= 2(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2 = 2 - 2 = 0$$

التمرين 11 : --

1) دراسة إتجاع تغير الدالة f' :

لدينا : $f'(x) = 2x - \sin x$ ومنه : $f''(x) = 2 - \cos x$

بما أن : $-1 \le -\cos x \le 1$ فإن : $1 \le 2 - \cos x \le 3$

ومنه : $1 \le f'(x) \le 3$.

وعليه : $f''(x) > 0$ إذن f' متزايدة تماما على المجال $]0 ; +\infty[$.

جدول التغيرات :

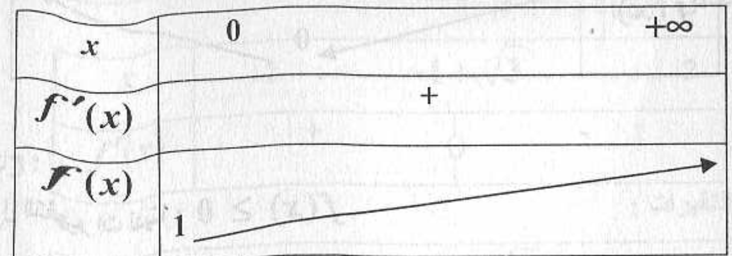
x	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	
$f'(x)$	0 ↗	

2) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

من جدول تغيرات الدالة f' نلاحظ أن : $f'(x) \ge 0$.

وعليه f متزايدة تماما على $[0 ; +\infty[$.

جدول التغيرات :



x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	1 ↗	

التمرين 12 : --

1) دراسة إتجاه تغير f' :

$f'(x) = -\sin x + x$ وعليه : $f''(x) = -\cos x + 1$.

لدينا : $-1 \le \cos x \le 1$. ومنه : $-1 \le -\cos x \le 1$.

و بالتالي : $0 \le 1 - \cos x \le 2$.

ومنه : $f''(x) \ge 0$ وعليه الدالة f' متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+		+
$f'(x)$	↗	0	↗

لدينا : $f'(x) = 0$ وعليه :

لما $x \in]0 ; +\infty[$: $f'(x) > 0$

لما $x \in]-\infty ; 0[$: $f'(x) < 0$.

وبالتالي f متزايدة تماما على المجال $[0 ; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty ; 0]$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	0	↗	

3) الاستنتاج :

من جدول التغيرات لدينا : $f(x) \geq 0$.

ومنه : $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0$.

وعليه : $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$

التمرين 13 : ------------------------------------

1) دراسة تغيرات الدالة f :

لدينا : $f(-2) = 0 \quad ; \quad f(2) = 0$

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{4 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} \times (x + 4)$$

و منه : $f'(x) = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x(x + 4)}{\sqrt{4 - x^2}}$

$$= \frac{4 - x^2 - x^2 - 4x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-2x^2 - 4x + 4}{\sqrt{4 - x^2}}$$

إشارة المشتق من إشارة : $-2x^2 - 4x + 4$.

لدينا : $\Delta' = (-2)^2 - (4)(-2) = 4 + 8 = 12$

ومنه : $x_1 = \frac{2 - \sqrt{12}}{-2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{-2} = -1 + \sqrt{3}$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{12}}{-2} = -1 - \sqrt{3}$$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$-2x^2-4x+4$		-	0	+	0	-	

إذن إشارة المشتق على $[-2 ; 2]$:

x	-2		$-1+\sqrt{3}$		2
$f'(x)$		+	0	-	

- جدول التغيرات :

x	-2		$-1+\sqrt{3}$		2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$f(-1+\sqrt{3})$	↘	0

$$f\left(-1+\sqrt{3}\right) = \left(-1+\sqrt{3}+4\right)\sqrt{4-\left(-1+\sqrt{3}\right)^2} = \left(3+\sqrt{3}\right)\sqrt{2\sqrt{3}}$$

2) معادلة المماس (Δ) :

لدينا : $y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$

حيث : $x_0 = 0 \quad ; \quad f(0) = 8 \quad ; \quad f'(0) = 2$

و بالتالي : $y = 2(x - 0) + 8$

و منه معادلة (Δ) هي : $y = 2x + 8$

3) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المماس (Δ) :

$$f(x) - y = (x + 4) \times \sqrt{4 - x^2} - 2(x + 4)$$

$$= (x + 4)\left[\sqrt{4 - x^2} - 2\right]$$

$$= \frac{(x+4)\left[\sqrt{4-x^2}-2\right]\left[\sqrt{4-x^2}+2\right]}{\sqrt{4-x^2}+2}$$

$$= \frac{(x+4)(4-x^2-4)}{\sqrt{4-x^2}+2}$$

و بالتالي : $f(x)-y = \dfrac{-x^2(x+4)}{\sqrt{4-x^2}+2}$

بما أن : $x^2 \geq 0$ و $\sqrt{4-x^2}+2>0$

فإن إشارة $f(x)-y$ تتعلق باشارة : $-(x+4)$

و هو سالب على المجال $]-2\,;\,2[$

إذن (Δ) يقطع (C) في النقطة ذات الفاصلة المعدومة و يكون تحت (C).

التمرين 14 : --

1) لدينا : $g'(x)=-\sin x$

$$(fog)'(x)=g'(x)\times f'[g(x)]$$

و منه : $(fog)'(x) = -\sin x\times\dfrac{1}{[g(x)]^2+1}$

وبالتالي $(fog)'(x)=\dfrac{-\sin x}{\cos^2 x+1}$

2) لدينا : $g'(x)=5$

$$(fog)'(x)=g'(x)\times f'[g(x)]$$

$$=5\times\frac{1}{[g(x)]^2+1}=\frac{5}{(5x-3)^2+1}$$

3) لدينا : $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$(fog)'(x)=g'(x)\times f'[g(x)]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2+1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}.(x+1)}$$

التمرين 15 : --

I-1) دراسة تغيرات g :

- $D_f =]-\infty\,;+\infty[$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
- $g'(x) = 3x^2-3 = 3(x^2-1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	$+\infty$

$g(-1)=-2 \quad ; \quad g(1)=-6$.

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا :

لدينا g مستمرة في المجال $\left[2\,;\,\dfrac{5}{2}\right]$ ومتزايدة تماما و لدينا :

$$g(2) = -2 \;;\; g\left(\frac{5}{2}\right) = 4,125$$

ومنه : $g(2) \times g\left(\frac{5}{2}\right) < 0$.

وبالتالي حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α حيث :

$\alpha \in \left]2 \;;\; \frac{5}{2}\right[$ ويحقق $g(\alpha) = 0$.

3) استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II- 1) تعيين مجموعة التعريف :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \;:\; x^2 - 1 \neq 0\}.$$

ومنه : $D_f =]-\infty \;;\; -1[\cup]-1 \;;\; 1[\cup]1 \;;\; +\infty[$.

- حساب النهايات :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2(x+2)}{x^2 - 1}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2(x+2)}{x^2 - 1}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

إشارة : $x^2 - 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{x^2(x+2)}{x^2 - 1} = +\infty$

لأن : $\begin{cases} x^2(x+2) \longrightarrow +1 \\ x^2 - 1 \xrightarrow{>} 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{x^2(x+2)}{x^2 - 1} = -\infty$

لأن : $\begin{cases} x^2(x+2) \longrightarrow 1 \\ x^2 - 1 \xrightarrow{<} 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{x^2(x+2)}{x^2 - 1} = -\infty$

لأن : $\begin{cases} x^2(x+2) \longrightarrow 3 \\ x^2 - 1 \xrightarrow{<} 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{x^2(x+2)}{x^2 - 1} = +\infty$

لأن : $\begin{cases} x^2(x+2) \longrightarrow 3 \\ x^2 - 1 \xrightarrow{>} 0 \end{cases}$

2- تعيين الأعداد a, b, c, d :

لدينا : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx + d}{x^2 - 1}$

$$= \frac{(ax + b)(x^2 - 1) + cx + d}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{ax^3 - ax + bx^2 - b + cx + d}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{ax^3 + bx^2 + (c-a)x - b + d}{x^2 - 1}$$

لكن : $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

وعليه : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c - a = 0 \\ -b + d = 0 \end{cases}$ أي أن : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \\ d = 2 \end{cases}$

و بالتالي : $f(x) = x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2 - 1}$.

3- تبيان أن (C) تقبل مستقيما مقاربا مائلا :

بما أن : $f(x) = x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2-1}$ و $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{x+2}{x^2-1} = 0$

فإن معادلة المستقيم المقارب (Δ) هي : $y = x + 2$.

4- دراسة الوضعية النسبية لـ (Δ) و (C) :

$$f(x) - y = \frac{x+2}{x^2-1}$$

الإشارة :

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x+2$		-	0	+	|	+	|	+	
x^2-1		+	|	+	0	-	0	+	
$f(x)-y$		-	0	+	||	-	||	+	

وعليه (Δ) يقطع (C) في النقطة ذات الفاصلة 2-

ويكون (Δ) فوق (C) في كل من المجالين $]-\infty ; -2[$ و $]-1 ; 1[$ ،

ويكون (Δ) تحت (C) في كل من المجالين $]-2 ; 1[$ و $]1 ; +\infty[$.

5- تبيان أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين :

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$

و عليه : $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي .

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$

و عليه : $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي.

6- تبيان أن إشارة $f'(x)$ يتعلق بإشارة $x \cdot g(x)$:

لدينا :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - 2x \cdot (x^3 + 2x^2)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{x\left[(3x+4)(x^2-1) - 2(x^3 + 2x^2)\right]}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x(3x^3 - 3x + 4x^2 - 4 - 2x^3 - 4x^2)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x(x^3 - 3x - 4)}{(x^2-1)^2}$$

بما أن : $(x^2 - 1)^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ تتعلق بالعبارة :

$x(x^3 - 3x - 4)$ أي بالعبارة $x \cdot g(x)$

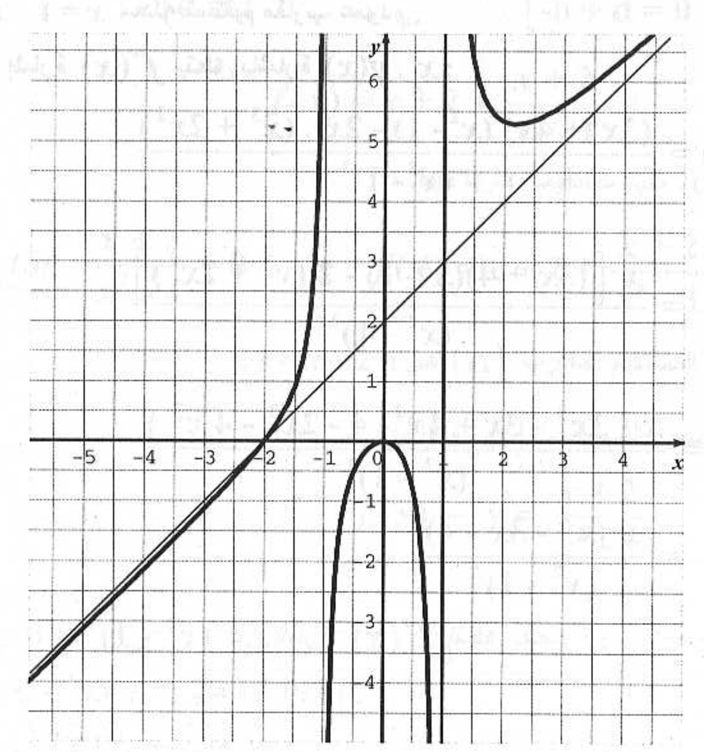
ومنه إشارة $f'(x)$ تكون كما يلي :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x		-	||	-	0	+	||	+	|	+	
$g(x)$		-	||	-	|	-	||	-	0	+	
$f'(x)$		+	||	+	0	-	||	-	0	+	

7- جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(x)$	↗	$+\infty$

8- إنشاء (C) باستعمال البرمجية Sine qua non :



التمرين 16 : -------------------------------------

1) مجموعة التعريف :

$$. D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$$

2) كتابة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x+1} & ; \quad x^2 - 3x \geq 0 \\ f(x) = -\dfrac{x^2 - 3x}{x+1} & ; \quad x^2 - 3x \leq 0 \end{cases}$$

لكن إشارة $(x^2 - 3x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$x^2 - 3x$		+	0	-	0	+	

وعليه :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x+1} & ; \quad x \in D_1 \\ f(x) = \dfrac{-(x^2 - 3x)}{x+1} & ; \quad x \in D_2 \end{cases}$$

حيث : $D_1 =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 0] \cup [3 ; +\infty[$ ،

و $D_2 = [0 ; 3]$.

3) كتابة $f(x)$ على الشكل :

لما $x \in D_1$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

$$= \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$$

$$= \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1}$$

ومنه : $$f(x) = \frac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$$

وعليه : $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -3 \\ b + c = 0 \end{cases}$ أي أن : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{cases}$.

لما $x \in D_2$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

$$= \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$$

$$= \frac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1}$$

ومنه : $$f(x) = \frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$$

وعليه : $\begin{cases} a=-1 \\ a+b=+3 \\ b+c=0 \end{cases}$ أي أن : $\begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=-4 \end{cases}$

وعليه : $$\begin{cases} f(x) = x-4+\dfrac{4}{x+1} \quad ; \quad x \in D_1 \\ f(x) = -x+4-\dfrac{4}{x+1} \quad ; \quad x \in D_2 \end{cases}$$

4) حساب : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

- $$\lim\limits_{\substack{<\\x\to 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{<\\x\to 0}} \frac{\frac{x^2-3x}{x+1}}{x} = \lim\limits_{\substack{<\\x\to 0}} \frac{x(x-3)}{x(x+1)}$$

$$= \lim\limits_{\substack{<\\x\to 0}} \frac{x-3}{x+1} = -3$$

- $$\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}} \frac{\frac{-(x^2-3x)}{x+1}}{x} = \lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}} \frac{-x(x-3)}{x(x+1)}$$

$$= \lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}} \frac{-(x-3)}{x+1} = 3$$

وعليه نستنتج أن f غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

5) حساب : $\lim\limits_{\substack{>\\h\to 0}} \dfrac{f(3+h)}{h}$

$$\lim\limits_{\substack{>\\h\to 0}} \frac{f(3+h)}{h} = \lim\limits_{\substack{>\\h\to 0}} \frac{\frac{(3+h)^2-3(3+h)}{3+h+1}}{h}$$

و منه : $$\lim\limits_{\substack{>\\h\to 0}} \frac{f(3+h)}{h} = \lim\limits_{\substack{>\\h\to 0}} \frac{9+6h+h^2-9-3h}{h(h+4)}$$

$$= \lim\limits_{\substack{>\\h\to 0}} \frac{h^2+3h}{h(4+h)} = \lim\limits_{\substack{>\\h\to 0}} \frac{h(h+3)}{h(4+h)}$$

$$= \lim\limits_{\substack{>\\h\to 0}} \frac{h+3}{h+4} = \frac{3}{4}$$

$$\lim\limits_{\substack{<\\h\to 0}} \frac{f(3+h)}{h} = \lim\limits_{\substack{<\\h\to 0}} \frac{-\frac{(3+h)^2-3(3+h)}{3+h+1}}{h} = \lim\limits_{\substack{<\\h\to 0}} -\frac{h+3}{h+4} = -\frac{3}{4}$$

وعليه f غير قابلة للاشتقاق عند 3 .

6) دراسة تغيرات الدالة f :

. $D_f =]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$

$$\lim\limits_{h\to 0} f(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left(x-4+\frac{4}{x+1}\right) = -\infty$$

$$\lim\limits_{h\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{h\to +\infty}\left(x-4+\frac{4}{x+1}\right) = +\infty$$

$$\lim\limits_{\substack{<\\h\to -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{<\\h\to -1}}\left(x-4+\frac{4}{x+1}\right) = -\infty$$

$$\lim\limits_{\substack{>\\h\to -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{>\\h\to -1}}\left(x-4+\frac{4}{x+1}\right) = +\infty$$

• حساب الدالة المشتقة :

- لما : $x \in D_1$:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{[(x+1)-2]\ [x+1+2]}{(x+1)^2}$$

ومنه :

$$f'(x) = \frac{(x-1)\ (x+3)}{(x+1)^2}$$

x	$-\infty$	-3	-1	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	- ‖ -	▨	▨	+

وعليه f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty ; -3]$ و $[3 ; +\infty[$

ومتناقصة تماما على كل من المجالين $[-3 ; -1[$ و $]-1 ; 0]$.

- لما : $x \in D_2$:

$$f'(x) = \frac{-(x-1)\ (x+3)}{(x+1)^2}$$

إذن :

x	0		1		3
$f'(x)$		+	0	-	

وعليه f متزايدة تماما على المجال $[0 ; 1]$.

و متناقصة تماما على المجال $[1 ; 3]$.

• جدول التغيرات :

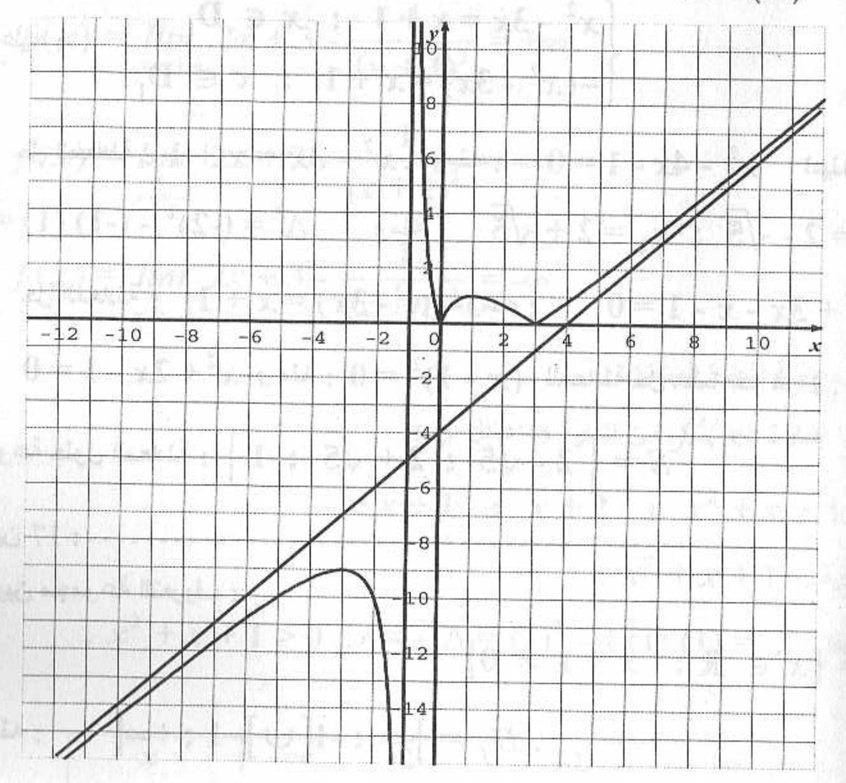
x	$-\infty$	-3		-1	0	$1+$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	‖ -	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-9	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$ ↘	0 ↗	1	↘ 0 ↗	$+\infty$

تبيان أن (Δ) مستقيم مقارب مائل :

• $$\lim_{|x|\to+\infty} [f(x) - (x-4)] = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{4}{x+1} = 0$$

ومنه $y = x - 4$ معادلة المستقيم المقارب المائل (Δ) .

8) إنشاء (Δ) و (C) :



9) المناقشة البيانية :

لدينا : $|x^2 - 3x| = m\ (x+1)$. ومنه : $m = \frac{|x^2 - 3x|}{x+1}$ ؛ $f(x) = m$

• لما : $m \in]-\infty ; -9[$ للمعادلة حلين متمايزين .

• لما : $m = -9$ للمعادلة حل مضاعف . لما: $m \in]-9 ; 0[$ ليس للمعادلة حلول

• لما $m = 0$: للمعادلة حلين متمايزين . لما $m \in]0 ; 1[$: للمعادلة 4 حلول .

- لما : $m = 1$ للمعادلة 3 حلول أحدهما مضاعف (و هو 1) .
- لما : $m \in \left]1 ; +\infty\right[$ للمعادلة حلين متمايزين .

- حل المعادلة من أجل $m = 1$: $f(x) = 1$

أي : $\dfrac{|x^2 - 3x|}{x+1} = 1$ ومنه : $|x^2 - 3x| = x + 1$.

وعليه : $\begin{cases} x^2 - 3x = x + 1 \ ; \ x \in D_1 \\ -(x^2 - 3x) = x + 1 \ ; \ x \in D_1 \end{cases}$

- حل المعادلة : $x^2 - 3x = x + 1$. ومنه : $x^2 - 4x - 1 = 0$ لدينا : $\Delta' = (-2)^2 - (-1)(1) = 5$ ومنه $x_1 = 2 - \sqrt{5} \ ; \ x_2 = 2 + \sqrt{5}$

- حل المعادلة : $-(x^2 - 3x) = x + 1$ ومنه: $-x^2 + 3x - x - 1 = 0$

أي : $-x^2 + 2x - 1 = 0$ و منه : $-(x-1)^2 = 0$ للمعادلة حل مضاعف هو 1 . وعليه

مجموعة حلول المعادلة : $S = \left\{ 2 - \sqrt{5} \ ; \ 2 + \sqrt{5} \ ; \ 1 \right\}$

التمرين 17 : --

1) تعيين مجموعة التعريف :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \ x + 1 \neq 0\}$$

ومنه : $D_f = \left]-\infty ; -1\right[\cup \left]-1 ; +\infty\right[$.

2) تبيان أن : $f'(x) = \dfrac{2(x+1)(x^2 + x + 1)}{(x+1)^3}$

لدينا : $f'(x) = 2 - \dfrac{-2(x+2)}{(x+1)^4} = \dfrac{2(x+1)^3 + 2}{(x+1)^3}$

$$= \frac{2\left[(x+1)^3 + 1\right]}{(x+1)^3} = \frac{2(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{(x+1)^3}$$

وعليه : $f'(x) = \dfrac{2(x+2)(x^2 + x + 1)}{(x+1)^3}$.

3) دراسة تغيرات الدالة f :

- حساب النهايات :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2} = -\infty$$

- دراسة إشارة المشتق :

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة جداء كل من :

$x^2 + x + 1$ و $x + 2$ و $x + 1$.

إشارة : $x^2 + x + 1$:

لدينا : $\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = -3$ وعليه : $x^2 + x + 1 > 0$.

ومنه :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+2$		-	0	+		+	
x^2+x+1		+		+		+	
$(x+1)^3$		-		-	0	+	
$f'(x)$		+		-	||	+	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty \,;\, -2]$ و $[-1 \,;\, +\infty[$.

ومتناقصة تماما على $[-2 \,;\, -1[$

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	- ‖	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-2	↘ $-\infty$ ‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

4) تبيان أن (Δ) مستقيم مقارب مائل :

$$\lim_{|x|\to+\infty} [f(x) - (2x+3)] = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{-1}{(x+1)} = 0$$

وعليه (Δ) هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) .

5) تبيان أن (C) يقطع محور الفواصل :

في المجال $\left[\frac{-3}{8} \,;\, \frac{-1}{4}\right]$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما .

لدينا :

$$f\left(\frac{-8}{3}\right) = 2\left(\frac{-8}{3}\right) + 3 - \frac{1}{\left(\frac{-8}{3}+1\right)^2}$$

$$= \frac{-3}{4} + 3 - \frac{1}{\left(\frac{-8}{3}\right)^2}$$

و منه : $f\left(\frac{-8}{3}\right) = \frac{9}{4} - \frac{64}{25} = \frac{-31}{100}$.

لدينا : $f\left(\frac{-1}{4}\right) = 2\left(\frac{-1}{4}\right) + 3 - \frac{1}{\left(\frac{-1}{4}+1\right)^2} = \frac{-1}{2} + 3 - \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$

و منه : $f\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{5}{2} - \frac{16}{9} = \frac{13}{18}$.

وعليه : $f\left(\frac{-3}{8}\right) \times f\left(\frac{-1}{4}\right) < 0$

ومنه يوجد عدد وحيد $x_0 \in \left[\frac{-3}{8} \,;\, \frac{-1}{4}\right]$ بحيث : $f(x_0) = 0$

إذن للمعادلة حل وحيد.

6) كتابة معادلة المماس :

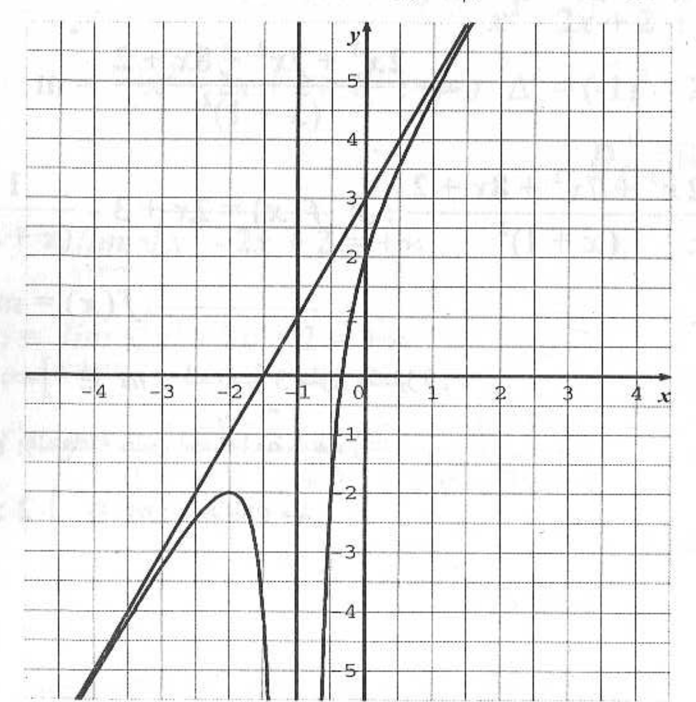
لدينا : $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$

لكن : $f(0) = 2 \;;\; f'(0) = 4$

و منه : $y = 4x + 2$.

7) إنشاء (C) :

لدينا : $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب .



8) تعيين النقط من (C) التي احداثياها أعدادا صحيحة :

لتكن $M(x\,;y)$ نقط من (C) إحداثياها صحيصة .

لدينا : $y = f(x)$ حيث x صحيحة و y صحيح .

ومنه : $2x + 3 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ عدد صحيح و بالتالي : $(x+1)^2$ يقسم 1

إذن : $(x+1)^2 = 1$ وبالتالي : $x + 1 = 1$ أو $x + 1 = -1$

إذن : $x = 0$ أو $x = -2$.

إذن النقط التي احداثياها صحيحة هي $A(0\,;2)$ ، $B(-2\,;-2)$.

9) المناقشة البيانية للمعادلة :

لدينا : $2x^3 + (7 - \mathrm{m})x^2 + 2(4 - \mathrm{m})x + 2 - \mathrm{m}$

إذن : $2x^3 + 7x^2 - \mathrm{m}x^2 + 8x - 2\mathrm{m}x + 2 - \mathrm{m} = 0$

وعليه : $2x^3 + 7x^2 + 8x + 2 = \mathrm{m}x^2 + 2\mathrm{m}x + \mathrm{m}$

وعليه : $2x^3 + 7x^2 + 8x + 2 = \mathrm{m}(x^2 + 2x + 1)$

وعليه : $\dfrac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x+1)^2} = \mathrm{m}$

لكن : $f(x) = 2x + 3 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ أي : $f(x) = \dfrac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x+1)^2}$

وعليه : $f(x) = \mathrm{m}$

لما $m \in \left]-\infty\,;-2\right[$: للمعادلة 3 حلول متمايزة .

لما $\mathrm{m} = -2$: للمعادلة حلين أحدهما مضاعف .

لما $m \in \left]-2\,;+\infty\right[$: للمعادلة وحيد.

التمرين 18:--

$D_f = \mathbb{R}$

الدالة f *متناقصة تماما على المجال* $\left]-\infty\,;1\right]$ ومتزايدة تماما على

المجال $\left[1\,;+\infty\right[$.

2) المستقيم الذي معادلته : $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C) .

3) النهايات : $\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \bullet \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

4) معادلة المستقيم المقارب المائل :

المستقيم المقارب المائل الأول يشمل النقطة $A(0\,;-1)$ و ميله 1 . إذن معادلته

هي : $y = x - 1$. البيان (C) يقع فوق المستقيم المقارب المائل .

المستقيم المقارب المائل الثاني يشمل النقطة $A'(0\,;1)$ و ميله 1- .

إذن معادلته هي: $y = -x + 1$. البيان (C) يقع فوق المستقيم المقارب المائل .

II) البرهان الحسابي : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

- مجموعة التعريف :

لدينا : $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 - 2x + 2 \geq 0\right\}$

ندرس إشارة : $x^2 - 2x + 2$.

$\Delta' = (-1)^2 - 2(1) = -1$ وعليه : $x^2 - 2x + 2 > 0$

وعليه : $D_f = \mathbb{R}$

- النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 2} = +\infty$$

- المشتق :

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

- إشارة المشتق :

من أجل $x = 1$: $f'(x) = 0$.

من أجل $x > 1$: $f'(x) > 0$ وعليه f متزايدة تماما على المجال $\left]1\,;+\infty\right[$.

من أجل $x < 1$: $f'(x) < 0$ وعليه f ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty\,;\,1]$.

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

• تبيان أن المستقيم الذي معادلته $x = 1$ محور تناظر :

لدينا : $y = f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 1}$

و بوضع : $\begin{cases} x - 1 = x' \\ y = y' \end{cases}$ نجد : $y' = \sqrt{x'^2 + 1}$

نضع : $y' = g(x')$ و منه : $D_g = \mathbb{R}$

من أجل كل عدد حقيقي x : $g(-x') = g(x')$ أي g دالة زوجية.

و عليه $x = 1$ معادلة محور تناظر لبيان الدالة f .

• معادلة المستقيم المقارب المائل :

- لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 2} - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2 - 2x + 2} - x\right]\left[\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x\right]}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x}$$

و منه :

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[-2 + \frac{2}{x}\right]}{x\left[\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = -1$$

ومنه : $y = x - 1$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.

- لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) + x] = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 2} + x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x\right]\left[\sqrt{x^2 - 2x + 2} - x\right]}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} - x}$$

و منه :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left[-2+\frac{2}{x}\right]}{x\left[-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-1} = 1$$

ومنه : $y = -x+1$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$.

التمرين 19 : --

1) تبيان أن : $f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$

لدينا : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2-8x+8)(x^2-2x+1)-(2x-2)(x^3-4x^2+8x-4)}{(x^2-2x+1)^2}$$

$$= \frac{(3x^2-8x+8)(x-1)^2-2(x-1)(x^3-4x^2+8x-4)}{\left[(x+1)^2\right]^2}$$

$$= \frac{(x-1)\left[(3x^2-8x+8)(x-1)-2(x^3-4x^2+8x-4)\right]}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{3x^3-3x^2-8x^2+8x+8x-8-2x^3+8x^2-16x+8}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{x^3-3x^2}{(x+1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x+1)^3}$$

وعليه : $f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x+1)^3}$.

2) تبيان أنه يمكن كتابة f على الشكل : $f(x) = ax+b+\dfrac{cx+d}{(x-1)^2}$

إذن :

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x-1)^2+cx+d}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(ax+b)(x^2-2x+1)+cx+d}{x^2-2x+1}$$

$$= \frac{ax^3-2ax^2+ax+bx^2-2bx+b+cx+d}{x^2-2x+1}$$

$$= \frac{ax^3+(-2a+b)x^2+(a-2b+c)x+b+d}{x^2-2x+1}$$

وعليه : $\begin{cases} a=1 \\ -2a+b=-4 \\ a-2b+c=8 \\ b+d=-4 \end{cases}$ أي أن : $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=3 \\ d=-2 \end{cases}$

ومنه : $f(x) = x-2+\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$.

3) دراسة تغيرات الدالة f :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4x^2+8x-4}{x^2-2x+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{\substack{<\\x\to1}} f(x) = \lim_{\substack{<\\x\to1}}\left(x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(x - 2 + \frac{3x - 2}{(x - 1)^2} \right) = +\infty$$

إشارة المشتق : $f'(x) = \frac{x^2 (x - 3)}{(x - 1)^2}$

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
x^2		+	0	+		+		+	
$x - 3$		-		-		-	0	+	
$(x - 1)^3$		-		-	0	+		+	
$f'(x)$		+		+	‖	-		+	

إذن f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty ; 1[$ و $]3 ; +\infty[$ ،

و متناقصة تماما على المجال $]1 ; 3[$.

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	‖	-		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{11}{4}$	↗	$+\infty$

4) تبيان أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين :

لدينا : $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$

وعليه : $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي .

ولدينا : $\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{3x - 2}{(x - 1)^2} = 0$

وعليه معادلة المستقيم المقارب المائل (Δ) هي : $y = x - 2$.

الوضعية النسبية لـ (Δ) و (C) : $f(x) - y = \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)-y$		-	‖	-	0	+	

إذن (C) يقطع تحت (Δ) في كل من المجالين $]-\infty ; 1[$ و $\left]1 ; \frac{3}{2}\right]$

و (C) يقطع فوق (Δ) في المجال $\left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$

و (Δ) يقطع (C) في النقطة ذات الفاصلة $\frac{3}{2}$.

5) تبيان وجود α :

في المجال $\left[\frac{2}{3} ; \frac{3}{4}\right]$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما .

ولدينا : $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - 2 + \frac{3\left(\frac{2}{3}\right) - 2}{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2} = \frac{-4}{3} + 0 = \frac{-4}{3}$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} - 2 + \frac{3\left(\frac{3}{4}\right) - 2}{\left(\frac{3}{4} - 1\right)^2} = \frac{-5}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{16}}$$

$$= \frac{-5}{4} + \frac{1}{4} \times 16 = \frac{-5}{4} + 4 = \frac{11}{4}$$

ومنه : $f\left(\frac{2}{3}\right) \times f\left(\frac{3}{4}\right) < 0$.

وحسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α

حيث $\alpha \in \left]\frac{2}{3} ; \frac{3}{4}\right[$ و $f(\alpha) = 0$.

6) - معادلة المماس :

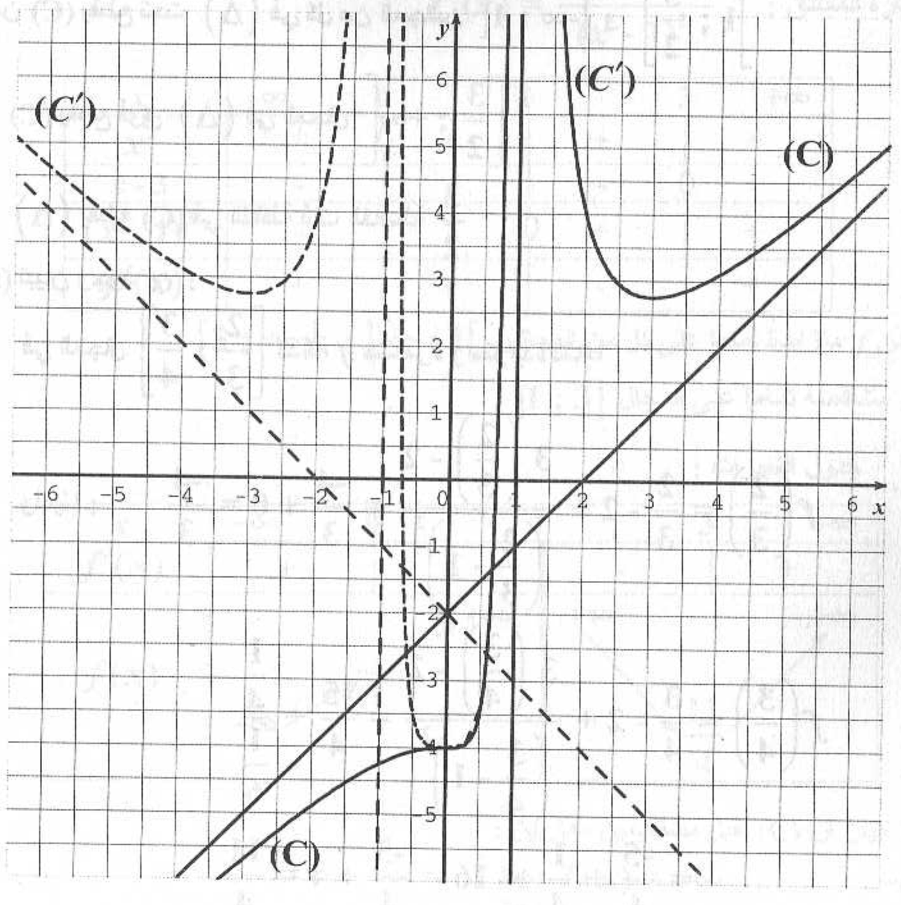
$$y = f'(2) \times (x - 2) + f(2)$$

حيث : $f'(2) = -4$; $f(2) = 4$

ومنه : $y = -4(x - 2) + 4$

و بالتالي : $y = -4x + 12$.

- إنشاء (C) :



7) المناقشة البيانية للمعادلة :

$$f(x) = 2m$$

بوضع $2m = \alpha$ أي $m = \frac{\alpha}{2}$ نجد : $f(x) = \alpha$

- لما $\alpha \in]-\infty ; -4[$ أي $m \in]-\infty ; -2[$ فإن للمعادلة حل وحيد.
- لما $\alpha = -4$ أي $m = -2$: للمعادلة حل مضاعف .
- لما $\alpha \in \left]-4 ; \frac{11}{4}\right[$ أي : $m \in \left]-2 ; \frac{11}{8}\right[$ للمعادلة حل وحيد.
- لما $\alpha = \frac{11}{4}$ أي $m = \frac{11}{8}$ للمعادلة حلين أحدهما مضاعف .
- لما $\alpha \in \left]\frac{11}{4} ; +\infty\right[$ أي $m \in \left]\frac{11}{4} ; +\infty\right[$ للمعادلة ثلاثة حلول متمايزة .

8) - تعيين D_g :

لدينا : $D_g = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 1 \neq 0\}$

$|x| - 1 = 0$ معناه : $|x| = 1$ ومنه : $x = 1$ أو $x = -1$

و بالتالي : $D_g = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$.

- نبين أن g دالة زوجية :

من أجل كل عدد حقيقي x من D_g : $-x \in D_g$ و لدينا :

$$g(-x) = |-x| - 2 + \frac{3|-x| - 2}{(|x| - 1)^2}$$ ومنه : $g(-x) = g(x)$

إذن g دالة زوجية .

- استنتاج رسم (C') :

لدينا :

$$\begin{cases} g(x) = x - 2 + \dfrac{3x - 2}{(x-1)^2} & ; x \geq 0 \\ g(x) = -x - 2 + \dfrac{-3x - 2}{(-x-1)^2} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

إذن لما $x \in [0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$: $g(x) = f(x)$

وعليه (C') ينطبق على (C) أما الجزء المتبقي من (C') فهو نظير الجزء الذي رسم بالنسبة لمحور التراتيب.

4- الدوال الأصلية لدالة

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال I . نسمي دالة أصلية للدالة f على I كل دالة F تقبل الاشتقاق على I بحيث من أجل كل قيمة لـ x من I فإن : $F'(x) = f(x)$.

مثال :

الدالة : $F : x \mapsto \sqrt{x}$

هي دالة أصلية للدالة $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

لأن : $F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$.

مبرهنة :

كل دالة مستمرة على مجال I تقبل دوال أصلية على I .

خاصية 1 :

لتكن F دالة أصلية لدالة f على مجال I

- الدالة : $x \mapsto F(x) + k$ حيث k عدد حقيقي كيفي هي أيضا دالة أصلية للدالة f .
- إذا كانت G دالة أصلية أخرى للدالة f فإنه يوجد عدد حقيقي k بحيث من أجل كل قيم x فإن $G(x) = F(x) + k$.

خاصية 2 :

لكل دالة مستمرة على مجال I دالة أصلية وحيدة تأخذ قيمة معينة y_0 من أجل كل قيمة معلومة x_0 من I .

- عمليات على الدوال الأصلية :

ليكن I مجال من $\mathbb{R}$ و x متغير حقيقي .

الدالة المعرفة بـ :	دالتها الأصلية معرفة بـ :	ملاحظات
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$g(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	C ثابت حقيقي
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$; $n \in \mathbb{N} - \{1\}$	$g(x) = \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$x \neq 0$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $x \in I$	$g(x) = 2\sqrt{x} + C$	$x > 0$ $x \in I$
$f(x) = \sin x$	$g(x) = -\cos x + C$	
$f(x) = \cos x$	$g(x) = \sin x + C$	
$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $x \in I$	$g(x) = \tan x + C$	$\cos x \neq 0$; $x \in I$
$f'f^n$	$\dfrac{f^{n+1}}{n+1}$	
$\dfrac{f'(x)}{f^n(x)}$; $x \in I$	$\dfrac{-1}{(n-1)f^{n-1}(x)} + C$	$f(x) \neq 0$ $x \in I$
$\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$; $x \in I$	$\sqrt{f(x)} + C$	$f(x) > 0$ $x \in I$

التمـــاريـــن

التمرين 1 :

ضع العلامة √ أماما كل جملة صحيحة و العلامة × أماما كل جملة خاطئة.

1) إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I : $f'(x) = g'(x)$ فإن الدالتان f و g متساويتان . ☐

2) توجد دالة مستمرة على مجال I ولا تقبل أية دالة أصلية على I . ☐

3) كل دالة كثيرة حدود تقبل مالا نهاية من الدوال الأصلية. ☐

4) إذا كانت F و H دالتان أصليتان لكل من الدالتين f و h فإن الدالة F + H أصلية للدالة f + h. ☐

5) إذا كانت F دالة أصلية لدالة f فإن الدالة λF دالة أصلية للدالة λf . ☐

6) إذا كانت F و H دالتان أصليتان لكل من الدالتين f و h فإن F × H دالة أصلية للدالة f × h . ☐

7) الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ على $\mathbb{R}_+^*$. ☐

8) الدالة $x \mapsto \frac{-1}{3x^3}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x^4}$ على $\mathbb{R}_+^*$. ☐

9) الدالة $x \mapsto \left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ هي دالة أصلية للدالة : $x \mapsto -\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ ☐

10) الدالة الأصلية التي تنعدم عند 1 للدالة : $x \mapsto x^2 - 4x$ ☐
هي الدالة : $x \mapsto \frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{5}{3}$.

التمرين 2 :

بين أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال I في كل حالة مما يلي :

1) $F(x) = -4x^2 + 5x$ ؛ $f(x) = -12x + 5$

2) $F(x) = x^4 - 5x^3 + 7$ ؛ $f(x) = 4x^3 - 15x$

3) $F(x) = \frac{2x}{x+4}$ ؛ $f(x) = \frac{8}{(x+4)^2}$

4) $F(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$ ؛ $f(x) = \frac{x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} - 2}{2(x+2)\sqrt{x}\sqrt{x+2}}$

5) $F(x) = \frac{-x^2 + 3x}{x^2 + 1}$ ؛ $f(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 3}{(x^2+1)^2}$

6) $F(x) = \frac{3x - 1}{\sqrt{x}}$ ؛ $f(x) = \frac{3x + 1}{2x\sqrt{x}}$

التمرين 3 :

عين مجموعة الدوال الأصلية F للدالة f في كل حالة مما يلي على المجال I .

1) $f(x) = x^3 - 5x + 2$, $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{2}{x^3}$, $I = \mathbb{R}_+^*$

3) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $I = \mathbb{R}_+^*$

4) $f(x) = \frac{x^5 + 5x^4 - 3x^2}{x^2}$, $I = \mathbb{R}_-$

5) $f(x) = (x^3 + 5)^2$, $I = \mathbb{R}$

6) $f(x) = (x^3 - 5)^3$, $I = \mathbb{R}$

7) $f(x) = \cos x - 3\sin x$, $I = \mathbb{R}$

8) $f(x) = x^3 + 4\cos x$, $I = \mathbb{R}$

التمرين 4 :

عين مجموعة الدوال الأصلية F للدالة f في كل حالة مما يلي على المجال I .

1) $f(x) = (x+1)^{10}$; $I = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = x(x^2 - 5)^6$; $I = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^4}$; $I =]-\infty ; 1[$.

4) $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^3}$; $I = \mathbb{R}$.

5) $f(x) = (4x+5)^4$; $I = \mathbb{R}$.

6) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$; $I=]2\,;+\infty[$.

7) $f(x)=\dfrac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}$; $I=\mathbb{R}$.

8) $f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$; $I=\mathbb{R}$.

9) $f(x)=\sin(-x+\pi)$; $I=\mathbb{R}$.

10) $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin\left(\pi x+\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; $I=\mathbb{R}$.

التمرين 5 :

عين الدالة الأصلية F للدالة f و التي تنعدم عند 2 مع تعيين المجال الذي تمت فيه الدراسة :

1) $f(x)=-4x^4+2x^2$ 2) $f(x)=(-x+3)^4$.

3) $f(x)=\dfrac{2x+3}{(x^2+3x+8)^2}$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

5) $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{8}$ 6) $f(x)=2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

التمرين 6 :

جد في كل حالة مما يلي ، الدالة الأصلية F للدالة f و التي تحقق $F(x_0)=y_0$ على المجال I.

1) $f(x)=x^2-4$, $x_0=1$, $y_0=2$, $I=\mathbb{R}$.

2) $f(x)=(x+3)^2$, $x_0=-1$, $y_0=1$, $I=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $x_0=2$, $y_0=-2$, $I=]1\,;+\infty[$.

4) $f(x)=2x-\dfrac{1}{x^2}$, $x_0=1$, $y_0=3$, $I=]0\,;+\infty[$.

5) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x_0=0$, $y_0=1$, $I=\mathbb{R}$.

6) $f(x)=\cos 2x-\dfrac{1}{2}\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$, $y_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $I=\mathbb{R}$.

7) $f(x)=\dfrac{-\sin x}{\cos^3 x}$, $x_0=0$, $y_0=1$, $I=\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

8) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$, $y_0=\dfrac{1}{2}$, $I=\mathbb{R}$.

التمرين 7 :

F و f دالتان معرفتان بالعبارتين :

$F(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{x^2+6x+18}$ ، $f(x)=\dfrac{x^2+6x}{(x^2+6x+18)^2}$.

حيث α , β عددان حقيقيان.

عين α و β حتى تكون F دالة أصلية للدالة f ثم استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f. استنتج الدالة الأصلية للدالة f و التي تأخذ القيمة 2 من أجل $x=0$.

التمرين 8 :

عين الدوال الأصلية F للدالة f في كل حالة ممايلي :

1) $f(x)=\sin^2 x$ 2) $f(x)=\cos^2 x$.

3) $f(x)=\cos^2\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 4) $f(x)=\sin^3 x$.

5) $f(x)=\sin x\cdot\cos^2 x$ 6) $f(x)=\sin 3x\cos 5x$.

التمرين 9 :

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x)=\dfrac{-2x+1}{(x+2)^3}$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-2\}$.

فإن : $f(x)=\dfrac{\alpha}{(x+2)^2}+\dfrac{\beta}{(x+2)^3}$.

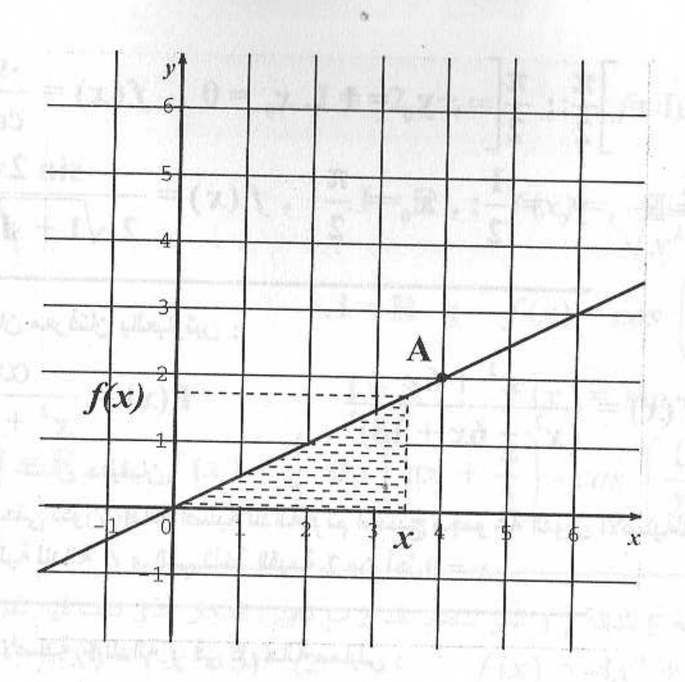
حيث α و β عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

2) استنتج الدوال الأصلية h للدالة f على المجال $]-2\,;+\infty[$.

3) استنتج الدالة الأصلية g للدالة f و التي تنعدم عند $x=1$.

التمرين 10 :

إليك التمثيل البياني (Δ) لدالة f على المجال $[0\,;+\infty[$:



لتكن $A(x)$ مساحة المثلث الملون.

1) اكتب $f(x)$ بدلالة x.

2) احسب $A(x)$.

3) احسب $A'(x)$. ماذا تستنتج ؟

الحلــــــــول

التمرين 1 : --

(1 ×	(2 ×	(3 √	(4 √
(5 √	(6 ×	(7 √	(8 √
(9 ×	(10 √		

التمرين 2 : --

1) لدينا : $F(x)=-4x^3+5x$ و $I=\mathbb{R}$ و $F'(x)=-12x+5$.

ومنه $F'(x)=f(x)$ وبالتالي F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2) لدينا $F(x)=x^4-5x^3+7$: $I=\mathbb{R}$ و $F'(x)=4x^3-15x$.

ومنه : $F'(x)=f(x)$ وبالتالي F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

3) $F(x)=\dfrac{2x}{x+4}$, $D_F=\mathbb{R}-\{-4\}$.

ومنه : $I=]-\infty\,;-4[$ أو $I=]-4\,;+\infty[$.

$F'(x)=\dfrac{2(x+4)-1\,(2x)}{(x+4)^2}$ وعليه : $F'(x)=\dfrac{8}{(x+4)^2}$.

إذن : $F'(x)=f(x)$ ومنه F دالة أصلية للدالة f على المجال I .

4) $F(x)=\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$. $D_F=\{x\in\mathbb{R} : x\geq 0 \text{ و } x+2>0\}$.

ومنه $D_F=[0\,;+\infty[$: $I=]0\,;+\infty[$.

$$F'(x)=\frac{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\sqrt{x+2}-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\times\left(x-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2}$$

$$F'(x)=\frac{\dfrac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2.\left(2\sqrt{x}-1\right)-\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}.\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$F'(x)=\frac{(x+2)\left(2\sqrt{x}-1\right)-x\sqrt{x}+x}{2\,(x+2)\sqrt{x}\,\sqrt{x+2}}$$

$$F'(x)=\frac{2x\sqrt{x}-x+4\sqrt{x}-2-x\sqrt{x}+x}{2\,(x+2)\sqrt{x}\,\sqrt{x+2}}$$

ومنه :

$$F'(x)=\frac{x\sqrt{x}+4\sqrt{x}-2}{2\,(x+2)\sqrt{x}\,\sqrt{x+2}}$$

و بالتالي : $F'(x)=f(x)$ ومنه F دالة أصلية للدالة f على I .

(5 $F(x) = \frac{-x^2 + 3x}{x^2 + 1}$, $D_F = \mathbb{R}$.

و منه : $I = \mathbb{R}$ و لدينا :

$$F'(x) = \frac{(-2x + 3)(x^2 + 1) - 2x(-x^2 + 3x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$F'(x) = \frac{-2x^3 - 2x + 3x^2 + 3 + 2x^3 - 6x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

وعليه : $F'(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 3}{(x^2 + 1)^2}$

و بالتالي : $F'(x) = f(x)$ ومنه F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

(6 $F(x) = \frac{3x - 1}{\sqrt{x}}$

$D_F = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

و منه : $D_F = \mathbb{R}_+^*$ و بالتالي : $I =]0 ; +\infty[$.

$$F'(x) = \frac{3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} . (3x - 1)}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$$

$$F'(x) = \frac{\frac{6x - 3x + 1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

و منه : $F'(x) = \frac{3x + 1}{2x\sqrt{x}}$ و بالتالي F دالة أصلية للدالة f على I .

التمرين 3 : ---

(1 $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} + 2x + k$, $f(x) = x^3 - 5x + 2$

حيث : k ثابت حقيقي

(2 $f(x) = \frac{2}{x^3}$ ومنه : $F(x) = \frac{-1}{x^2} + k$

(3 $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ومنه : $f(x) = \frac{1}{x^2} - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

و بالتالي : $F(x) = \frac{-1}{x} - 2\sqrt{x}$.

(4 $f(x) = \frac{x^5 + 5x^4 - 3x^2}{x^2}$ ومنه : $f(x) = \frac{x^5}{x^2} - \frac{5x^4}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2}$

وبالتالي : $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3$

وعليه : $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 - 3x + k$.

(5 $f(x) = (x^3 + 5)^2$ وعليه : $f(x) = x^6 + 10x^3 + 25$.

و بالتالي : $F(x) = \frac{x^7}{7} - \frac{5x^4}{2} + 25x + k$.

(6 $f(x) = (x^2 - 5)^3$.

ومنه : $f(x) = (x^2)^3 - 3(x^2)^2 \times 5 + 3(x^2)(5)^2 - (5)^3$

إذن : $f(x) = x^6 - 15x^4 + 75x^2 - 125$

و بالتالي : $F(x) = \frac{x^7}{7} - 3x^5 + 25x^3 - 125x + k$.

(7 $f(x) = cosx - 3\,sinx$ وبالتالي : $F(x) = sinx + 3cosx + k$.

(8 $f(x) = x^2 + 4\cos x$ وبالتالي : $F(x) = \frac{x^3}{3} + 4\sin x + k$.

التمرين 4 : ---

(1 $f(x) = (x + 1)^{10}$ وعليه : $f(x) = 1 \times (x + 1)^{10}$.

ومنه : $f(x)$ من الشكل : $f(x) = h'(x) \times [h(x)]^{10}$.

وعليه : $F(x) = \frac{[(h(x)]^{11}}{11}$ حيث $h(x) = x + 1$.

وبالتالي : $F(x) = \frac{1}{11}(x + 1)^{11} + k$ ؛ k ثابت حقيقي .

2) $f(x) = x(x^2-5)^6$ ومنه : $f(x) = \frac{1}{2} \times 2x \,.\, (x^2-5)^6$.

وبالتالي f من الشكل : $f(x)=\frac{1}{2}\, h'(x)\times[h(x)]^6$.

حيث : $h(x)=x^2-5$. إذن : $F(x)=\frac{1}{2}\,\frac{[h(x)]^7}{7}+k$.

إذن : $F(x)=\frac{1}{14}(x^2-5)^7+k$.

3) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^4}$ وعليه : $f(x)$ من الشكل : $\frac{h'(x)}{[h(x)]^4}$ حيث :

$h(x)=x-1$ ومنه : $F(x)=\frac{-1}{3[h(x)]^3}+k$

وبالتالي : $F(x)=\frac{-1}{3(x-1)^3}+k$ ؛ k ثابت حقيقي .

4) $f(x)=\frac{x}{(x^2+1)^3}$ ومنه : $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{(x^2+1)^3}$.

وعليه $f(x)$ من الشكل : $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{h'(x)}{[h(x)]^3}$ حيث : $h(x)=x^2+1$.

و بالتالي : $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{-1}{2(x^2+1)^2}+k$.

و بالتالي : $F(x)=\frac{-1}{4(x^2+1)^2}+k$ ؛ k ثابت حقيقي .

5) $f(x)=(4x+5)^4$ ومنه : $f(x)=\frac{1}{4}\times 4.\,(4x-5)^4$

إذن $f(x)$ من الشكل : $f(x)=\frac{1}{4}\times h'(x).[h(x)]^4$ حيث :

$h(x)=4x+5$

و بالتالي : $F(x)=\frac{1}{4}\times\frac{[h(x)]^5}{5}+k$

وعليه : $F(x)=\frac{1}{20}(4x+5)^5+k$ ؛ k ثابت حقيقي .

6) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ ومنه : $f(x)=2\times\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$

و عليه : $f(x)$ من الشكل : $f(x)=2\times\frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}}$ حيث : $h(x)=x-2$.

و بالتالي : $F(x)=2\sqrt{h(x)}+k$

إذن : $F(x)=2\sqrt{x-2}+k$ ؛ k ثابت حقيقي .

7) $f(x)=\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ ومنه : $f(x)=2\times\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}$.

وهي من الشكل : $f(x)=2\times\frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}}$ حيث : $h(x)=x^2+2x+5$.

و بالتالي : $F(x)=2\sqrt{h(x)}+k$ إذن : $F(x)=2\sqrt{x^2+2x+5}+k$.

8) $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

ومنه : $F(x)=\frac{1}{2}\times\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+k$.

9) $f(x)=\sin(-x+\pi)$

ومنه : $F(x)=\cos(-x+\pi)+k$.

10) $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$

ومنه : $F(x)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{\pi}\right)\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)+k$.

$$F(x)=\frac{-1}{2\pi}\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)-2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)+k$$

التمرين 5 :

---

1) $f(x)=-4x^4+2x^2$ ، مجال الدراسة $\mathbb{R}$ لأن الدالة f مستمرة على

$\mathbb{R}$ وعليه تقبل دوال أصلية F معرفة كما يلي : $F(x) = \frac{-4}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + k$

لكن : $F(2) = 0$ ومنه : $\frac{-4}{5}(2)^5 + \frac{2}{3}(2)^3 + k = 0$

وعليه : $\frac{-128}{5} + \frac{16}{3} + k = 0$.

إذن : $\frac{-304}{15} + k = 0$ ومنه : $k = \frac{304}{15}$

وعليه : $F(x) = \frac{-4}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{304}{15}$.

2) $f(x) = (-x+3)^4$ وعليه : $f(x) = (-1)(-1)(-x+3)^4$

وبالتالي : $F(x) = (-1) . \frac{(-x+3)^5}{5} + k$.

إذن : $F(x) = \frac{-1}{5}(-x+3)^5 + k$.

و لدينا : $F(2) = 0$ ومنه : $\frac{-1}{5}(-2+3)^5 + k = 0$

إذن : $k = \frac{1}{5}$ وعليه : $F(x) = \frac{-1}{5}(-x+3)^5 + \frac{1}{5}$.

3) $f(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x+8)^2}$; $D_f = \mathbb{R}$.

وبالتالي : $F(x) = \frac{-1}{x^2+3x+8} + k$.

لكن $F(2) = 0$ ومنه : $\frac{-1}{2^2+3(2)+8} + k = 0$

وعليه : $k = \frac{1}{18}$ ومنه : $F(x) = \frac{-1}{x^2+3x+8} + \frac{1}{18}$.

4) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$, $D_f =]1 ; +\infty[$ ومنه : $I =]1 ; +\infty[$.

وبالتالي : $F(x) = \sqrt{x-1} + k$; $k \in \mathbb{R}$

لكن : $F(2) = 0$ ومنه : $\sqrt{2-1} + k = 0$

وعليه : $k = -1$ إذن : $F(x) = \sqrt{x-1} - 1$.

5) $f(x) = \sin\frac{\pi x}{8}$, $D_f = \mathbb{R}$ ومنه : $I = \mathbb{R}$.

وبالتالي : $F(x) = \frac{-1}{\frac{\pi}{8}} \cos\frac{\pi x}{8} + k$

ومنه : $F(x) = \frac{-8}{\pi}\cos\frac{\pi x}{8} + k$ لكن : $F(2) = 0$

ومنه : $\frac{-8}{\pi}\cos\frac{\pi}{4} + k = 0$ أي أن : $\frac{-8}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} + k = 0$

وعليه : $\frac{-4\sqrt{2}}{\pi} + k = 0$ وبالتالي : $k = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$

إذن : $F(x) = \frac{-8}{\pi}\cos\frac{\pi x}{8} + \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$.

6) $f(x) = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}$; $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

ومنه : $I =]0 ; +\infty[$ و لدينا : $f(x) = 2x - 2 . \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

إذن : $F(x) = x^2 - 2\sqrt{x} + k$.

لكن : $F(2) = 0$ وعليه : $(2)^2 - 2\sqrt{2} + k = 0$.

وعليه : $k = 2\sqrt{2} - 4$ إذن : $F(x) = x^2 - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{2} - 4$.

التمرين 6 : --

1) $f(x) = x^2 - 4$ ومنه : $F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + k$.

لكن : $F(1) = 2$ ومنه : $\frac{1}{3} - 4 + k = 2$.

أي : $k = \frac{17}{3}$ ومنه : $F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + \frac{17}{3}$.

2) $f(x) = (x+3)^2$ ومنه : $f(x) = 1 . (x+3)^2$.

و بالتالي : $F(x) = \frac{(x+3)^3}{3} + k$.

لكن : $F(-1) = 1$ ومنه : $\frac{(-1+3)^3}{3} + k = 1$.

و عليه : $k = \frac{-5}{3}$ و بالتالي : $F(x) = \frac{(x+3)^3}{3} - \frac{5}{3}$.

3) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ ومنه : $F(x) = \frac{-1}{x-1} + k$.

لكن : $F(2) = -2$ وعليه : $-1 + k = -2$ إذن : $k = -1$

وعليه : $F(x) = \frac{-1}{x-1} + k$.

4) $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$ ومنه : $F(x) = x^2 + \frac{1}{x} + k$.

لكن : $F(1) = 3$ و عليه : $1 + 1 + k = 3$ ومنه : $k = 1$

ومنه : $F(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 1$.

5) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ ومنه : $f(x) = 2 \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$.

و بالتالي : $F(x) = 2\sqrt{x^2+1} + k$ لكن $F(0) = 1$

و عليه : $2 + k = 0$ ومنه : $k = -2$.

إذن : $F(x) = 2\sqrt{x^2+1} - 2$.

6) $f(x) = cos2x - \frac{1}{2}sinx$

ومنه : $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}cosx + k$ لكن : $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه : $\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}cos\frac{\pi}{3} + k = \frac{\sqrt{3}}{2}$

و عليه : $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + k = \frac{\sqrt{3}}{2}$

أي : $k = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$ ومنه : $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}cosx + \frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

7) $f(x) = \frac{-sinx}{cos^3x}$ ومنه : $F(x) = \frac{-1}{2cos^2x} + k$

لكن : $F(0) = 1$ و منه : $\frac{-1}{2} + k = 0$ إذن : $k = \frac{1}{2}$

و عليه : $F(x) = \frac{-1}{2cos^2x} + \frac{1}{2}$.

8) $f(x) = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}$ ومنه : $f(x) = \frac{2\sin x \cos x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}$

وعليه $f(x)$ من الشكل : $f(x) = \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}}$ حيث : $h(x) = 1 + \sin^2 x$

وعليه : $F(x) = \sqrt{h(x)} + k$ أي : $F(x) = \sqrt{1+\sin^2 x} + k$

لكن : $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ وعليه : $\sqrt{1+1} + k = \frac{1}{2}$.

ومنه : $k = \frac{1}{2} - \sqrt{2}$ إذن : $F(x) = \sqrt{1+\sin^2 x} + \frac{1}{2} - \sqrt{2}$.

التمرين 7 : ---

F دالة أصلية للدالة f أي : $F'(x) = f(x)$.

ومنه : $$F'(x) = \frac{\alpha(x^2+6x+18) - (\alpha x + \beta)(2x+6)}{(x^1+6x+18)^2}$$

$$= \frac{-\alpha x^2 - 2\beta x + 18\alpha - 6\beta}{(x^2+6x+18)^2}$$

بالمطابقة مع $f(x)$ نجد : $$\begin{cases} -\alpha = 1 \\ -2\beta = 6 \\ 18\alpha - 6\beta = 0 \end{cases}$$

إذن : $\alpha = -1$ و $\beta = -3$

ومنه مجموعة الدوال الأصلية للدالة f هي :

$H(x) = \frac{-x-3}{x^2+6x+18} + k$ ؛ حيث k ثابت حقيقي .

من أجل $H(0) = 2$ نجد : $k = \frac{-1}{6}$ ومنه الدالة الأصلية للدالة f التي تأخذ القيمة 2 من أجل $x = 0$ معرفة بـ : $H(x) = \frac{-x-3}{x^2+6x+18} + \frac{1}{6}$.

التمرين 8 : --

1) $f(x) = \sin^2 x$:

لدينا : $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ومنه : $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

و بالتالي : $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 2x + k$

و منه : $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + k$ ؛ k ثابت حقيقي .

2) $f(x) = \cos^2 x$:

لدينا : $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ وعليه : $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

إذن : $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) + k$.

و عليه : $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + k$ ؛ k ثابت حقيقي .

3) $f(x) = \cos^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$:

لدينا : $\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 + \cos\left[2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right]}{2}$

و منه : $\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x + \pi)$

إذن : $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)$.

و عليه : $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\sin(4x) + k$.

إذن : $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x) + k$ ؛ k ثابت حقيقي .

4) $f(x) = \sin^3 x$:

لدينا : $\sin^3 x = \sin x \,.\, \sin^2 x$

$= \sin x.(1 - \cos^2 x)$

$= \sin x - \sin x \,.\, \cos^2 x$

إذن : $f(x) = \sin x - \sin x \,.\, \cos^2 x$

و بالتالي : $F(x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + k$ ؛ k ثابت .

5) $f(x) = \sin x \cos^2 x$:

إذن : $F(x) = -\frac{1}{3}\cos^3 x + k$ ؛ k ثابت حقيقي .

6) $f(x) = \sin 3x \cos 5x$:

لدينا : $\sin\alpha \,.\, \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$

و منه : $\sin 3x \,.\, \cos 5x = \frac{1}{2}\left[\sin(3x+5x) + \sin(3x-5x)\right]$

$= \frac{1}{2}\sin 8x + \frac{1}{2}\sin(-2x)$

و منه : $f(x) = \frac{1}{2}\sin 8x - \frac{1}{2}\sin 2x$.

وعليه : $F(x) = \frac{1}{2}\times\frac{-1}{8}cos8x - \frac{1}{2}\times\frac{-1}{2}\ cos2x + k$.

و منه : $F(x) = \frac{-1}{16}\ cos8x + \frac{1}{4}\ cos2x + k$.

التمرين 9 : --

1) تعيين α , β :

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \neq 0\}$ ومنه : $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$.

لدينا : $f(x) = \frac{\alpha}{(x+2)^2} + \frac{\beta}{(x+2)^3}$

ومنه : $f(x) = \frac{\alpha\ (x+2) + \beta}{(x+2)^3}$

إذن : $f(x) = \frac{\alpha x + 2\alpha + \beta}{(x+2)^3}$.

ومنه : $\begin{cases} \alpha = -2 \\ 2\alpha + \beta = 1 \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 5 \end{cases}$

ومنه : $f(x) = \frac{-2}{(x+2)^2} + \frac{5}{(x+2)^3}$.

2) استنتاج الدوال الأصلية :

لدينا : $f(x) = -2\times\frac{1}{(x+2)^2} + 5\times\frac{1}{(x+2)^3}$

و عليه : $h(x) = \frac{2}{x+2} - \frac{5}{2\ (x+2)^2} + k$

3) استنتاج g :

لدينا : $h(1) = 0$ ومنه : $\frac{2}{3} - \frac{5}{18} + k = 0$ ومنه : $k = \frac{-7}{18}$.

و منه : $g(x) = \frac{2}{x+2} - \frac{5}{2\ (x+2)^2} - \frac{7}{18}$.

التمرين 10 : --

1) كتابة $f(x)$ بدلالة x :

لدينا : (Δ) مستقيم يشمل المبدأ O و النقطة $A\ (4\ ;\ 2)$ ومنه لدينا :

$(\Delta) : y = ax$ وبما أن : (Δ) $A \in$ فإن : $2 = a \times 4$.

و عليه : $a = \frac{2}{4}$ أي : $a = \frac{1}{2}$ وبالتالي : $y = \frac{1}{2}x$

و منه : $f(x) = \frac{1}{2}\ x$.

2) حساب $A(x)$:

مساحة المثلث : $A(x) = \frac{x \times f(x)}{2}$

و منه : $A(x) = \frac{x\ .\ \frac{1}{2}x}{2}$ وعليه : $A(x) = \frac{1}{4}\ x^2$.

3) حساب $A'(x)$:

لدينا : $A'(x) = \frac{1}{2}\ x$

الاستنتاج : $A'(x) = f(x)$

ومنه مساحة الحيز من المستوي هي عبارة دالة أصلية للدالة f .

5 - الدالة الأسية ذات الأساس e

تعريف :

ليكن a عدد حقيقي

نسمي حلا على المجال I للمعادلة التفاضلية : $y' = ay$ كل دالة f تقبل الاشتقاق على I و تحقق على I : $f' = af$.

مبرهنة 1 :

توجد دالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ وهي حل للمعادلة التفاضلية : $y' = y$ وتحقق $f(0) = 1$. تسمى هذه الدالة الدالة الأسية و نرمز لها بالرمز : $x \mapsto \exp(x)$

مبرهنة 2 :

الدالة الأسية موجبة تماما على $\mathbb{R}$

مبرهنة 3 :

a عدد حقيقي معطى . حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = k \, . \exp(ax)$ حيث k عدد حقيقي ثابت .

2- الرمز e^x :

مبرهنة 4 :

من أجل كل عددان حقيقيان a و b : $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(p)$

مبرهنة 5 :

العدد الحقيقي $\exp(1)$ يرمز له بالرمز e حيث : $e \simeq 2,72$.

من أجل كل عدد حقيقي x نضع : $\exp(x) = e^x$.

خواص :

• $e^0 = 1 \; ; \; e^1 = e \; ; \; e^{-1} = \frac{1}{e} \; ; \; e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

نتائج :

من أجل كل عددان حقيقيان a و b

1) $e^{a+b} = e^a \times e^b$ 2) $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

3) $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ 4) $e^{rX} = (e^x)^r \; , \; r \in Q$

3- دراسة الدالة : $x \mapsto e^x$

نتائج : من تعريف الدالة $x \mapsto e^x$ لدينا :

• $x \mapsto e^x$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ • $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

خاصية 6 :

1) $\lim_{x\to -\infty} e^x = +\infty$ 2) $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$.

نتائج :

• من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x > 0$

• من أجل كل عددان x و y لدينا : $e^x = e^y$ تكافئ $x = y$

$e^x > e^y$ تكافئ $x > y$

خاصية 7 :

إذا كانت g دالة تقبل الاشتقاق على مجال I فإن الدالة $f : x \mapsto e^{g(x)}$ تقبل الاشتقاق على I حيث : $f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$

مثال :

عين الدالة المشتة للدالة f حيث : $f(x) = e^{x^2 - 4x}$

الحل :

$$f'(x) = (2x - 4)\, e^{x^2 - 4x}$$

خاصية 8 :

1) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ 2) $\lim_{x\to -\infty} x^n e^x = 0$

4- المعادلة التفاضلية : $y' = ay + b$:

خاصية 9 :

a و b عددان حقيقيان ، $a \neq 0$ حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ تعطى بالعبارة :

$y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث k ثابت غير معدوم .

مثال :

حلول المعادلة $y' = 2y - 3$ تعطى بالعبارة : $y = ke^{2x} + \frac{3}{2}$

حيث k ثابت حقيقي غير معدوم .

التمــــــــاريــــــن

التمرين 1 :

ضع العلامة √ أمام كل جملة صحيحة و العلامة × أمام كل جملة خاطئة .

1) يوجد عدد x من $\mathbb{R}$ بحيث $e^{-x} < 0$

2) حل المعادلة التفاضلية $y' = 2y$ هي الدوال f المعرفة بالعبارة :

$$f(x) = k \cdot e^{-2x}$$

3) $e^{-x} = -e^{x}$

4) $e^{2x} = -e^{x^2}$

5) $e^{2x} = (e^{x})^2$

6) الدالة $x \mapsto e^{-2x}$ معرفة على $\mathbb{R}$

7) $e^{\frac{1}{3}x} = \sqrt[3]{e^{x}}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-4x} = 0$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0$

10) إذا كان : $e^{-x} < e^{-y}$ فإن : $x < y$

11) $e^{x} \times e^{-x} = 1$

12) $e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^{3}}$

التمرين 2 :

حل في $\mathbb{R}$ كل من المعادلات و المتراجحات التالية :

1) $e^{x^2-4x} > 1$ 2) $e^{|x-2|} < e^{2}$

3) $e^{3x-5} - e^{-x^2-2} = 0$ 4) $e^{x^2-2} = e^{-6}$

5) $2x\,e^{x} - 3\,e^{x} \le 0$ 6) $e^{1-3x} \le e^{5x-4}$

7) $(x^2 - 5x)\,e^{x} - (2x - 12)\,e^{x} = 0$.

التمرين 3 :

حل في $\mathbb{R}$ الجمل الآتية :

$\begin{cases} xy = 12 \\ e^{x} \cdot e^{y} = e^{-7} \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} xy = -2 \\ e^{5x} \cdot e^{6y} = \dfrac{1}{e^{7}} \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} x + y = 5 \\ e^{2x} \cdot \dfrac{1}{e} = e^{-y} \end{cases}$

التمرين 4 :

عين مجموعة تعريف الدالة f و المجموعة التي تقبل فيها الاشتقاق ثم عين دالتها المشتقة في كل حالة مما يلي :

1) $f(x) = e^{-2x+5}$ 2) $f(x) = e^{x^2-4x} - 5x$

3) $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$ 4) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$

5) $f(x) = e^{|x|}$ 6) $f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$

7) $f(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{e^{x}}$ 8) $f(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{x} - 1}$

9) $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 4}{e^{2x}}$ 10) $f(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{x^2 - 4}$

11) $f(x) = e^{2x} - 4\,e^{x} + 5$ 12) $f(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{2x} - 1}$

التمرين 5 :

عين الدوال الأصلية للدالة f في كل حالة مما يلي :

1) $f(x) = e^{2x}$ 2) $f(x) = xe^{x^2}$

3) $f(x) = (3x^2 - x)\,e^{2x^3 - x^2}$ 4) $f(x) = \dfrac{e^{x}}{(e^{x} + 1)^2}$

5) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ 6) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$

التمرين 6 :

احسب نهايات الدالة f من أجل : $x \to +\infty$ في كل حالة مما يلي :

1) $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x}$ 2) $f(x) = e^{-x+1}$

3) $f(x) = \dfrac{e^{x^3}}{x^3}$ 4) $f(x) = e^{2x} - 4x$

5) $f(x) = xe^{-5x}$ 6) $f(x) = \dfrac{e^{x-2}}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} = \dfrac{e^x}{x^3}$ 8) $f(x) = \dfrac{e^{3x} - 5x^3 + 2}{x^3}$

التمرين 7 :

احسب نهايات الدالة f من أجل $x \to 0$ في كل حالة مما يلي :

1) $f(x) = \dfrac{e^{4x} - 1}{x}$ 2) $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{x^2}$

3) $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2}$ 4) $f(x) = \dfrac{x}{e^{2x} - 1}$

5) $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{4x^2 + 6x}$ 6) $f(x) = \dfrac{-e^{-x} + 1}{x^2 - x}$

التمرين 8 :

x عدد طبيعي .

1) احسب المجموع : $S_1(x) = 1 + e + e^2 + \dots + e^x$.

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} S_1(x)$.

3) احسب المجموع : $S_2(x) = 1 + e^{-1} + e^{-2} + \dots + e^{-x}$.

4) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} S_2(x)$.

التمرين 9 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^{3x} - e^{2x}}{x} , & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0 .

2) عين الدالة المشتقة للدالة f من أجل $x \neq 0$.

التمرين 10 :

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = (x^2 + x + 1)\,e^x$

1) عين كل من المشتقات المتتالية f' ؛ f'' ؛ $f^{(3)}$ للدالة f .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون :

$$f^{(n)}(x) = e^x\left[x^2 + (2n+1)x + n^2 + 1\right]$$

التمرين 11 :

ادرس تغيرات الدالة f في كل حالة مما يلي :

1) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ ، 2) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

3) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ 4) $f(x) = e^{|x|}$

5) $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{1 - e^x}$ 6) $f(x) = e^{(x-2)(x+2)}$. ثم انشئ بياناتها.

التمرين 12 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = x + \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i} , \vec{j})$ (الوحدة 4 cm) .

1) احسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

2) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ثم استنتج و جود مستقيم مقارب (D) .

3) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

4) بين أن المستقيم ذو المعادلته $y = x + 1$ مستقيم مقارب عند $+\infty$ للمنحنى (C)

5) عين النقطة ω نقطة تقاطع (C) مع محور التراتيب ثم بين أن ω مركز تناظر للمنحنى (C) .

6) أنشئ المنحنى (C) .

التمرين 13 :

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + 1 - e^{-x}$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i} , \vec{j})$

1) ادرس تغيرات الدالة f.

2) ادرس الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة للمنحني(C) . 3) أنشئ (C) .

4) عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f ثم استنتج الدالة الأصلية التي تأخذ القيمة 4 عند $x = 0$.

التمرين 14 :

I - لتكن g دالة معرفة بالعبارة : $g(x) = e^x + x + 1$.

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث :

$$-1{,}28 < \alpha < -1{,}27$$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II - لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x + 1}$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

1) بين أن : $f'(x) = \dfrac{e^x.g(x)}{(e^x+1)^2}$ ثم استنتج تغيرات الدالة f .

2) بين أن $f(\alpha) = \alpha + 1$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

3) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0.

4) ادرس الوضعية النسبية لكل من (C) و (Δ) .

5) بين أن المستقيم الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) .

6) أنشئ (C) .

التمرين 15 :

1) لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = 80 + ae^{bx}$.

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

عين a و b حتى يشمل (C) النقطتين $A(0 ; 53)$, $B(3 ; 60)$

(تعطى القيم الحقيقية ثم القيم المدورة إلى 10^{-1})

2) يعطى إنتاج شركة في السنة n بالعبارة $U_n = 80 - 27e^{-0,1n}$

- بين أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما

- بعد كم سنة يزيد إنتاج الشركة عن 72

3) نعرف المتتالية (V_n) كما يلي : $V_n = e^{-0,1n}$

- بين أن (V_n) متتالية هندسية.

- احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

- احسب $S = V_1 + V_2 + ... + V_{12}$

التمرين 16 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1}$.

(Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$، الوحدة 2cm .

I- 1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(-x) + f(x) = 2$.

ثم استنتج وجود مركز تناظر ω للمنحنى (Γ)

2) احسب نهايات الدالة f ثم استنتج معادلات المستقيمات المقاربة.

3) احسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f.

4) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (Γ) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

5) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x) = f(x) - (x+1)$

- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = -\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$

استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم إشارة $g(x)$ بعد تعيين $g(0)$.

- استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (Γ) و المماس (Δ) .

6) أنشئ (Δ) ثم (Γ) .

II- 1) بين أنه إذا كان $f(x) = x$ فهذا يكافئ أن $g(x) = -1$.

2) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ يقطع (Γ) في نقطة فاصلتها α حيث $2 < \alpha < 3$.

III- ليكن المجال : $I = [2 ; 3]$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$$f'(x) = 4\left(\frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{(e^x+1)^2}\right)$$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من I : $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

الحلـــــــول

التمرين 1 : --

(1 ×	(2 √	(3 ×
(4 ×	(5 √	(6 √
(7 √	(8 √	(9 √
(10 ×	(11 √	(12 √

التمرين 2 : --

حل المعادلات و المتراجحات التالية :

1) لدينا : $e^{x^2-4x} > 1$ وهذه تكافئ : $e^{x^2-4x} > e^0$

وعليه : $x^2 - 4x > 0$ أي $x(x-4) > 0$

ومنه : $x \in]-\infty ; 0[\cup]4 ; +\infty[$

مجموعة الحلول : $S =]-\infty ; 0[\cup]4 ; +\infty[$

2) لدينا : $e^{|x-2|} > e^{2}$ وهذه تكافئ : $|x - 2| < 2$

وعليه : $-2 < x - 2 < 2$ وبالتالي : $0 < x < 4$

مجموعة الحلول : $S =]0 ; 4[$

3) لدينا : $e^{3x-5} - e^{-x^2-2} = 0$ وهذه تكافئ $e^{3x-5} = e^{-x^2-2}$

وعليه : $3x - 5 = -x^2 - 2$ ومنه : $x^2 + 3x - 3 = 0$

لدينا : $\Delta = 21$ ومنه للمعادلة حلين متمايزين

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$$

4) لدينا : $e^{x^2-5x} = e^{-6}$ وهذه تكافئ : $x^2 - 5x = -6$

إذن : $x^2 + 5x + 6 = 0$

$\Delta = 1$ وعليه للمعادلة حلين متمايزين $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

5) لدينا : $2x e^x - 3e^x \leq 0$ وهذه تكافئ : $e^x (2x - 3) \leq 0$

وهي تكافئ : $2x - 3 \leq 0$ ومنه : $x \leq \frac{3}{2}$

مجموعة الحلول : $S = \left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$

6) لدينا : $e^{1-3x} \leq e^{5x-4}$ وهذه تكافئ : $1 - 3x \leq 5x - 4$

ومنه : $-8x \leq -5$ وبالتالي : $x \geq \frac{5}{8}$

مجموعة الحلول : $S = \left[\frac{5}{8} ; +\infty\right[$

7) $(x^2 - 5x) e^x - (2x - 12) e^x = 0$

وهذه تكافئ : $e^x (x^2 - 5x - 2x + 12) = 0$

وهذه تكافئ : $x^2 - 7x + 12 = 0$

$\Delta = 1$ ومنه للمعادلة حلين متمايزين $x_1 = 3$, $x_2 = 4$

التمرين 3 : --

حل الجمل :

1) لدينا : $\begin{cases} xy = 12 \\ e^x . e^y = e^{-7} \end{cases}$ وهي تكافئ : $\begin{cases} xy = 12 \\ e^{x+y} = e^{-7} \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} xy = 12 \\ x + y = -7 \end{cases}$ ومنه x , y حلين للمعادلة : $z^2 + 7z + 12 = 0$

لدينا : $\Delta = 1$ ومنه للمعادلة حلين متمايزين : $z_1 = -3$ و $z_2 = -4$.

إذن : $(x ; y) = (-3 ; -4)$ أو $(x ; y) = (-4 ; -3)$.

مجموعة الحلول : $S = \{ (-4 ; -3) , (-3 ; -4) \}$.

2) لدينا : $\begin{cases} xy = -2 \\ e^{5x} . e^{6y} = \frac{1}{e^7} \end{cases}$ وهي تكافئ : $\begin{cases} xy = -2 \\ e^{5x+6y} = e^{-7} \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} 5x . 6y = -60 \\ 5x + 6y = -7 \end{cases}$

إذن $5x$, $6y$ هما حلين للمعادلة : $z^2 + 7z - 60 = 0$

لدينا : $\Delta = 289 = (17)^2$ ومنه للمعادلة حلين : $z_1 = -12$ و $z_2 = 5$

ومنه : $5x = -12$ و $6y = 5$ وعليه : $x = \frac{-12}{5}$ و $y = \frac{5}{6}$

أو $5x = 5$ و $6y = -12$ وعليه : $x = 1$ و $y = -2$

مجموعة حلول الجملة : $S = \left\{ \left(\frac{-12}{5} ; \frac{5}{6}\right) , (1 ; -2) \right\}$

3) لدينا : $\begin{cases} x + y = 5 \\ e^{2x} . \frac{1}{e} = e^{-y} \end{cases}$ وهي تكافئ : $\begin{cases} x + y = 5 \\ e^{2x} . e^{-1} = e^{-y} \end{cases}$

أي : $\begin{cases} x + y = 5 \\ e^{2x-1} = e^{-y} \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 1 = -y \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} x - 5 = -y \\ 2x - 1 = -y \end{cases}$ إذن : $2x - 1 = x - 5$

وعليه : $x = -4$ ومنه : $y = 9$.

مجموعة حلول الجملة : $S = \{(-4 ; 9)\}$.

التمرين 4 : --

1) $f(x) = e^{-2x+5}$ ، الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$

حيث : $f'(x) = -2e^{-2x+5}$

2) $f'(x) = e^{x^2-4x} - 5x$ ، الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$

حيث : $f'(x) = (2x - 4)\, e^{x^2-4x} - 5$

3) $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$ ، الدالة f معرفة من أجل $x - 2 \neq 0$ ومنه : $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

و تقبل الاشتقاق على D_f حيث : $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2} \times e^{\frac{1}{x-2}}$

4) $f'(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$. الدالة f معرفة من أجل $x \neq 0$ ومنه : $D_f = \mathbb{R}^*$

و تقبل الاشتقاق على D_f حيث : $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}\, e^{\frac{x-1}{x}}$

5) $f(x) = e^{|x|}$. الدالة f معرفة هي $\mathbb{R}$ و لدينا :

$$\begin{cases} f(x) = e^{x} \ ; \ x \geq 0 \\ f(x) = e^{-x} \ ; \ x \leq 0 \end{cases}$$

* من أجل $x > 0$: f تقبل الاشتقاق حيث : $f'(x) = e^{x}$
* من أجل $x < 0$: f تقبل الاشتقاق حيث : $f'(x) = -e^{-x}$
* من أجل $x = 0$: ندرس قابلية الاشتقاق :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{e^{-x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[-\frac{e^{-x} - 1}{-x} \right] = -1$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليسار

لكن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

6) $f(x) = e^{\sqrt{x}-1}$. الدالة f معرفة من أجل $x \geq 0$ أي على $\mathbb{R}_+$ وتقبل

الاشتقاق من $x > 0$ أي على $\mathbb{R}_+^*$ حيث : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}-1}$.

7) $f(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{e^{2x}}$ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$

حيث : $f'(x) = \dfrac{e^{x}(e^{2x}) - 2e^{2x}(e^{x} - 1)}{(e^{2x})^2}$

ومنه : $f'(x) = \dfrac{e^{2x}(e^{x} - 2e^{x} + 2)}{e^{4x}}$

إذن : $f'(x) = \dfrac{-e^{x} + 2}{e^{2x}}$

8) $f(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{x} - 1}$. الدالة f معرفة من أجل $e^{x} - 1 \neq 0$ ومنه $e^{x} \neq 1$

وعليه : $x \neq 0$ إذن : $D_f = \mathbb{R}^*$ و f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$

حيث : $f'(x) = \dfrac{e^{x}(e^{x} - 1) - e^{x} . e^{x}}{(e^{x} - 1)^2}$ وعليه : $f'(x) = \dfrac{-e^{x}}{(e^{x} - 1)^2}$

9) $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 4}{e^{2x}}$. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$

حيث : $f'(x) = \dfrac{2e^{2x} . e^{2x} - 2e^{2x}(e^{2x} - 4)}{(e^{2x})^2}$

إذن : $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(e^{2x} - e^{2x} + 4)}{(e^{2x})^2}$ وبالتالي : $f'(x) = \dfrac{8}{e^{2x}}$.

10) $f(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{x^2 - 4}$. الدالة f معرفة من أجل : $x^2 - 4 \neq 0$

ومنه : $D_f = \mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$ وتقبل الاشتقاق على D_f

حيث : $f'(x) = \dfrac{e^{x}(x^2 - 4) - 2x(e^{x} - 1)}{(x^2 - 4)^2}$ ومنه :

$$f'(x) = \frac{x^2e^{x} - 4e^{x} + 2x\, e^{x} + 2x}{(x^2 - 4)^2}$$

وبالتالي : $f'(x)=\dfrac{(x^2-2x-4)\,e^x+2x}{(x^2-4)^2}$

11) $f(x)=e^{2x}-4e^x+5$. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$

حيث : $f'(x)=2e^{2x}-4e^x$

12) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}-1}$. الدالة f معرفة من أجل $e^{2x}-1\neq 0$ ومنه : $e^{2x}\neq 1$

أي : $e^{2x}\neq e^0$ أي $2x\neq 0$ ومنه : $x\neq 0$ إذن : $D_f=\mathbb{R}^*$ الدالة f

تقبل الاشتقاق على D_f حيث : $f'(x)=\dfrac{e^x(e^{2x}-1)-2e^{2x}.e^x}{(e^{2x}-1)^2}$

إذن : $f'(x)=\dfrac{e^x(e^{2x}-1-2e^{2x})}{(x^2-1)^2}$ وبالتالي : $f'(x)=\dfrac{e^x(-e^{2x}-1)}{(e^{2x}-1)^2}$

التمرين 5 : --

تعيين الدوال الأصلية :

1) $f(x)=e^{2x}$, $D_f=\mathbb{R}$ لدينا : $f(x)=\dfrac{1}{2}\,.\,2e^{2x}$

وهي من الشكل : $f(x)=k\,.\,h'(x)\,e^{hx}$

الدالة f معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ وعليه تقبل دوال أصلية g حيث

$g(x)=\dfrac{1}{2}\times e^{2x}+c$ مع c ثابت حقيقي .

2) $f(x)=xe^{x^2}$, $D_f=\mathbb{R}$ ولدينا : $f(x)=\dfrac{1}{2}\,.\,2x\,.\,e^{x^2}$

الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ و عليه تقبل دوال أصلية g حيث :

$g(x)=\dfrac{1}{2}\,.\,e^{x^2}+c$ مع c ثابت حقيقي .

3) $f(x)=(3x^2-x)\,e^{2x^3-x^2}$, $D_f=\mathbb{R}$ ولدينا : $f(x)=\dfrac{1}{2}(6x^2-2x)\,e^{2x^3-x^2}$

الدالة f معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ و عليه تقبل دوال أصلية g حيث :

$g(x)=\dfrac{1}{2}\,e^{2x^3-x^2}+c$ مع c ثابت حقيقي .

4) $f(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$: الدالة f من الشكل : $f(x)=\dfrac{h'(x)}{[h(x)]^n}$

الدالة f معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ وعليه تقبل دوال أصلية g حيث :

إذن $g(x)=\dfrac{-1}{(2-1)\,(e^x-1)^{2-1}}$: $g(x)=\dfrac{-1}{e^x-1}+c$

مع c ثابت حقيقي.

5) $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, $D_f=\mathbb{R}^*$ ولدينا : $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\times e^{\frac{1}{x}}$

أي : $f(x)=-\dfrac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ و هي من الشكل : $f(x)=k\,.\,h'(x)\times[h(x)]^n$

الدالة f معرفة و مستمرة على كل من المجالين $]-\infty\,;0[$ و $]0\,;+\infty[$

ومنه تقبل دوال أصلية معرفة كما يلي : $g(x)=-e^{\frac{1}{x}}+c$

مع c ثابت حقيقي .

6) $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}$, $D_f=\mathbb{R}$

ولدينا : $f(x)=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}$ وهي من الشكل : $f(x)=\dfrac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}}$

وبالتالي بما أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ فإنها تقبل دوال أصلية g حيث :

$g(x)=\sqrt{e^{2x}+1}+c$ مع c ثابت حقيقي .

التمرين 6 : --

حساب النهايات :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x\,.\,\dfrac{e^{x^2}}{x^2}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1}=0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^3}}{x^3}=0$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty} (e^{2x} - 4x) = \lim_{x\to+\infty} 2x\left(\frac{e^{2x}}{2x} - 2\right) = +\infty$$

$$5)\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-5x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{5}(-5x)\,e^{-5x} = 0$$

$$6)\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-2}}{x-2} \times \frac{x-2}{x} = +\infty$$

$$7)\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{3}x}\right)^3}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{3}x}}{x}\right)^3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{3}x}}{3\times\frac{1}{3}x}\right)^3 = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\times\frac{e^{\frac{1}{3}x}}{\frac{1}{3}x}\right)^3$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{e^{\frac{1}{3}x}}{\frac{1}{3}x}\right)^3 = +\infty$$

$$8)\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x} - 5x^3 + 2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{3x}}{x^3} - 5 + \frac{2}{x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x}}{x}\right)^3 - 5 + \frac{2}{x} = +\infty$$

التمرين 7 : --

حساب النهايات :

$$1)\ \lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{e^{4x} - 1}{x} = \lim_{x\to0} 4 \times \frac{e^{4x} - 1}{4x} = 4$$

$$2)\ \lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{e^{2x} - 1}{x^3} = \lim_{x\to0} \frac{2}{x^2} \times \frac{e^{2x} - 1}{(2x)} = +\infty$$

$$3)\ \lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{e^{2x} - 2e^{x} + 1}{x^2} = \lim_{x\to0} \left(\frac{e^{x} - 1}{x}\right)^2 = 1$$

$$4)\ \lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x\to0} \frac{1}{\frac{e^{2x} - 1}{2x}\times 2} = \frac{1}{2}$$

$$5)\ \lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{e^{2x} - 1}{4x^2 + 6x} = \lim_{x\to0} = \frac{e^{2x} - 1}{2x(2x+3)}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3}$$

$$6)\ \lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{-e^{-x} + 1}{x^2 - x} = \lim_{x\to0} \frac{-(e^{-x} - 1)}{-x(-x+1)}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} \times \frac{1}{-x+1} = -1$$

التمرين 8 : --

1) حساب : $S_1(x)$

$$S_1(x) = e^0 + e^1 + e^2 + \ldots + e^x$$

وهو مجموع حدود متتالية هندسية أساسها e و عددها $x + 1$ حدا و منه :

$S_1(x) = 1 \times \frac{1 - e^{x+1}}{1 - e}$ إذن : $S_1(x) = \frac{1 - e^{x+1}}{1 - e}$.

2) حساب النهاية :

$$\lim_{x\to+\infty} S_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 - e} \times (1 - e^{x+1}) = +\infty$$

3) حساب المجموع : $S_2(x)$

$$S_2(x) = e^{-0} + e^{-1} + e^{-2} + \ldots + e^{-x}$$

وهو مجموع $x + 1$ حدا من متتالية هندسية أساسها e^{-1} أي $\frac{1}{e}$ وعليه :

أي : $\mathrm{S}_2(x) = 1 . \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{x+1}}{1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}}$ $\qquad$ $\mathrm{S}_2(x) = 1 . \dfrac{1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x+1}}}{\dfrac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}}}$

إذن : $\mathrm{S}_2(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 1} \times \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x+1}}\right)$.

4) حساب النهاية :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{S}_2(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 1} \times \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{x+1}}\right)$$
$$= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 1}$$

التمرين 9 : ------------------------------------

1) دراسة قابلية الاشتقاق عند 0 : $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x}}{x}}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}}{x}\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right)$$

وعليه :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} \times \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} \times \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = -\infty$$

إذن f لا تقبل الاشتقاق عند 0 .

2- تعيين الدالة المشتقة من أجل $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{(3\mathrm{e}^{3x} - 2\mathrm{e}^{2x})\,x - (\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x})}{x^2}$$

ومنه :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}\left[(3\mathrm{e}^x - 2)\,x - (\mathrm{e}^x - 1)\right]}{x^2}$$

التمرين 10 : ------------------------------------

1) حساب f' ، f'' ، $f^{(3)}$

$$f'(x) = (2x + 1)\,\mathrm{e}^x + (x^2 + x + 1)\mathrm{e}^x$$

إذن : $f'(x) = (x^2 + 3x + 2)\mathrm{e}^x$

ومنه : $f''(x) = (2x + 3)\,\mathrm{e}^x + (x^2 + 3x + 2)\mathrm{e}^x$

إذن : $f''(x) = (x^2 + 5x + 5)\mathrm{e}^x$

ومنه : $f^{(3)}(x) = (2x + 5)\,\mathrm{e}^x + (x^2 + 5x + 5)\mathrm{e}^x$

$$f^{(3)}(x) = (x^2 + 7x + 10)\mathrm{e}^x$$

2) البرهان أن :

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x\left[x^2 + (2\mathrm{n} + 1)\,x + \mathrm{n}^2 + 1\right]$$

• من أجل $\mathrm{n} = 1$: $f^{(1)}(x) = \mathrm{e}^x\,(x^2 + 3x + 2)$

وهي صحيحة مما سبق .

• نفرض صحة $\mathrm{p}(n)$ و نبرهن صحة $p(n + 1)$

$$p(n) : f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x\left[x^2 + (2n + 1)\,x + n^2 + 1\right]$$
$$p(n+1) : f^{(n+1)}(x) = \mathrm{e}^x\left[x^2 + (2n + 3)\,x + (n + 1)^2 + 1\right]$$

لدينا : $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$ ومنه :

$$f^{(n+1)}(x) = \mathrm{e}^x\left[x^2 + (2\mathrm{n} + 1)\,x + \mathrm{n}^2 + 1\right] + (2x + 2\mathrm{n} + 1)\,\mathrm{e}^x$$
$$= \mathrm{e}^x\left[x^2 + (2\mathrm{n} + 3)\,x + \mathrm{n}^2 + 2\mathrm{n} + 1 + 1\right]$$
$$= \mathrm{e}^x\left[x^2 + (2\mathrm{n} + 3)\,x + (\mathrm{n} + 1)^2 + 1\right]$$

ومنه : $p(n + 1)$ صحيحة

إذن : $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x\left[x^2 + (2\mathrm{n} + 1)\,x + \mathrm{n}^2 + 1\right]$

التمرين 11 : ------------------------------------

دراسة تغيرات الدوال :

1) لدينا : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$

• $\mathrm{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^x - 1 \neq 0\right\}$

$\mathrm{e}^x - 1 = 0$ معناه : $\mathrm{e}^x = 1$ ومنه : $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0$ أي : $x = 0$

وبالتالي : $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ أي : $D_f \;]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{e^x - 1} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 - e^{-x}} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+

لأن : $\begin{cases} e^x \longrightarrow 1 \\ e^x - 1 \overset{<}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$ ،

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{e^x}{e^x - 1} = +\infty$$

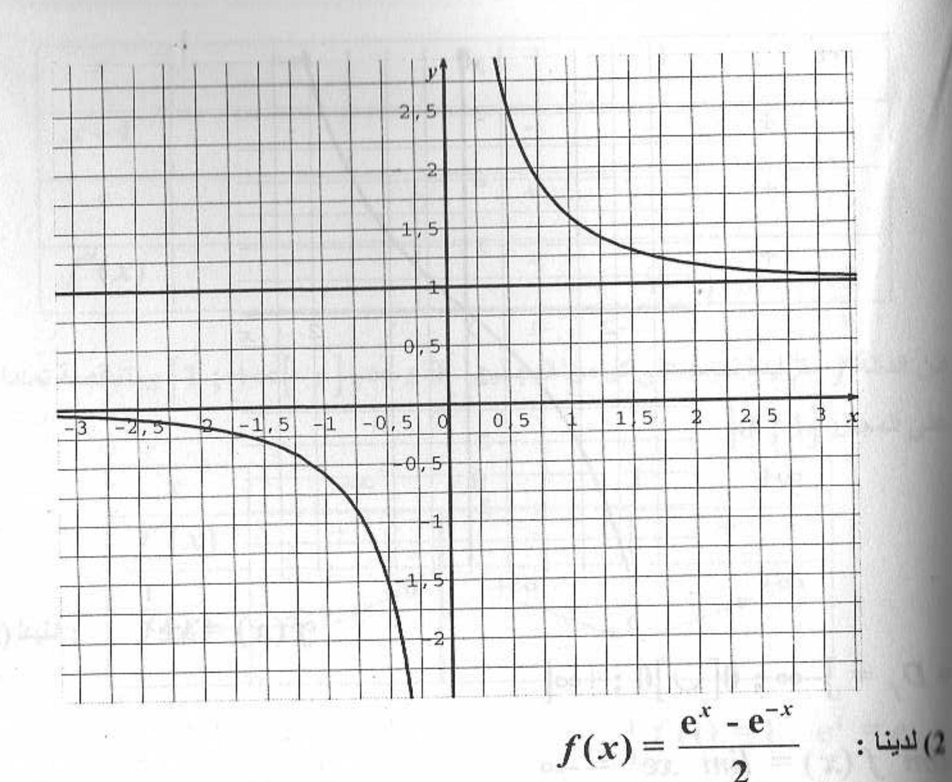
لأن : $\begin{cases} e^x \longrightarrow 1 \\ e^x - 1 \overset{>}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$

- $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{e^x(e^x - 1 - e^x)}{(e^x - 1)^2}$

ومنه : $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$

وعليه $f'(x)$ سالبة من أجل كل عدد حقيقي x من D_f ومنه f متناقصة تماما على كل من المجالين : $]-\infty ; 0[$ و $]0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-		-	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘		1



2) لدينا : $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

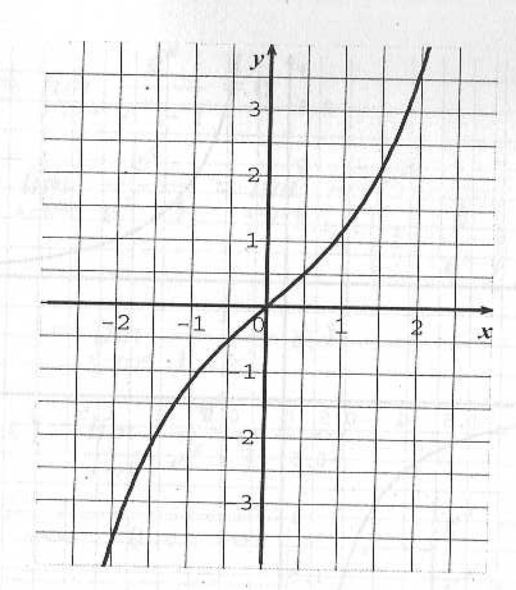
- $D_f =]-\infty ; +\infty[$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$$

- $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

ومنه $f'(x) > 0$ على $\mathbb{R}$ ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$



3) لدينا : $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

• $D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} xe^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{z \to +\infty} \frac{e^z}{z} = +\infty$$

• $f'(x) = 1 \,.\, e^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right) x$

ومنه : $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left[1 - \frac{1}{x}\right]$ أي : $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x - 1}{x}\right)$

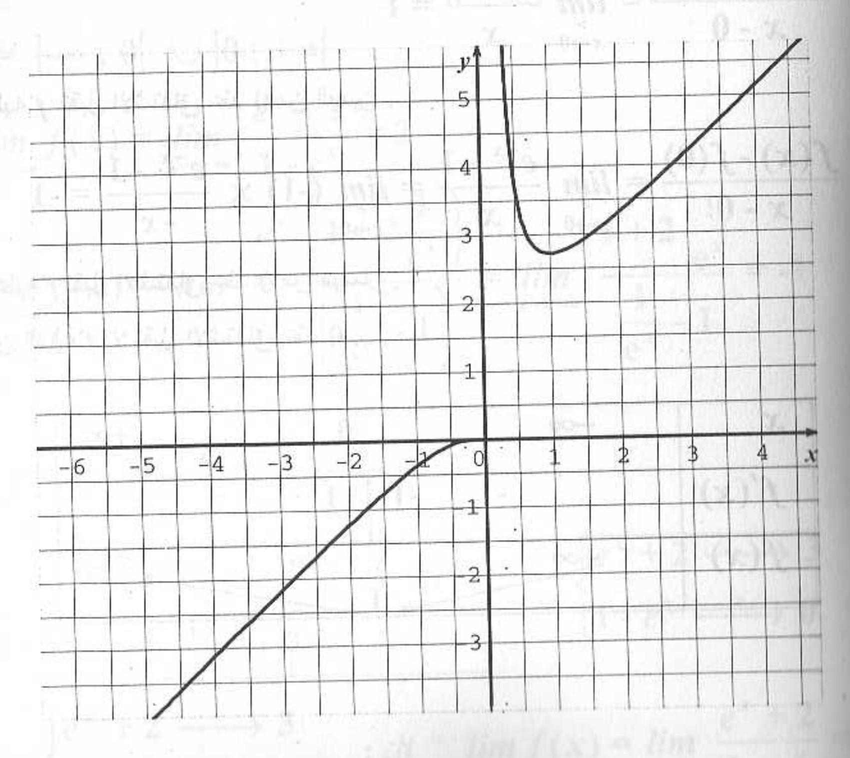
لدينا $e^{\frac{1}{x}} > 0$ ومنه $f'(x)$ له نفس إشارة : $\frac{x - 1}{x}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		-		-	0	+	
x		-	0	+		+	
$f'(x)$		+	||	-	0	+	

إذن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $]1 ; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]0 ; 1[$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0 || $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

$$f(1) = 1 \,.\, e^{\frac{1}{1}} = e$$



4) لدينا : $f(x) = e^{|x|}$

• $D_f =]-\infty ; +\infty[$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{|x|} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{|x|} = +\infty$

لدينا : $\begin{cases} |x| = x & , \ x \geq 0 \\ |x| = -x & , \ x \leq 0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} f(x) = e^{x} & , \ x \geq 0 \\ f(x) = e^{-x} & , \ x \leq 0 \end{cases}$

• من أجل $x > 0$: $f'(x) = e^x$ وعليه f متزايدة تماما على $[0 ; +\infty[$

من أجل $x < 0$: $f'(x) = -e^{-x}$ وعليه f متناقصة تماما على $]-\infty ; 0]$

• قابلية الاشتقاق عند 0 .

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

وعليه f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين .

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-1) \times \frac{e^{-x} - 1}{-x} = -1$$

وعليه f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليسار .

لكن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 0 .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-1 \,\|\, 1$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

5) لدينا : $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{1 - e^x}$

• $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - e^x \neq 0\}$

$1 - e^x = 0$ معناه : $e^x = 1$ ومنه $x = 0$

$D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x + 2}{1 - e^x} = 2$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x \left(1 + 2\dfrac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(\dfrac{1}{e^x} - 1\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + 2\dfrac{1}{e^x}}{\dfrac{1}{e^x} - 1} = -1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{e^x + 2}{1 - e^x} = +\infty$ لأن : $\begin{cases} e^x + 2 \longrightarrow 3 \\ 1 - e^x \overset{>}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$1 - e^x$		$+$	0	$-$	

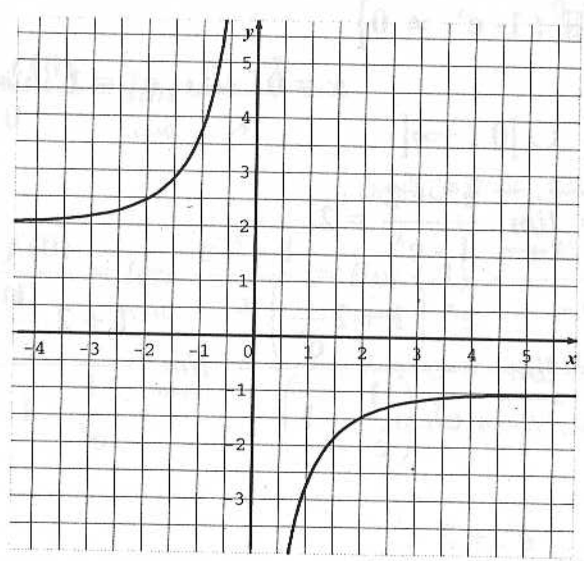
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{e^x + 2}{1 - e^x} = -\infty$ لأن : $\begin{cases} e^x + 2 \longrightarrow 3 \\ 1 - e^x \overset{<}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{e^x\ (1 - e^x) - (-e^x)\ (e^x + 2)}{(1 - e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x\ (1 - e^x + e^x + 2)}{(1 - e^x)^2} = \frac{3e^x}{(1 - e^x)^2}$$

وعليه $f'(x) > 0$ من أجل كل عدد حقيقي x من D_f إذن f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty\ ;\ 0[$ و $]0\ ;\ +\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	||	+
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow -1$



6) لدينا : $f(x) = e^{(x-2)\ (x+2)}$

• $D_f =]-\infty\ ;\ +\infty[$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{(x-2)\ (x+2)} = +\infty$

لأن : $(x - 2)\ (x + 2) \longrightarrow +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{(x-2)\ (x+2)} = +\infty$

لأن : $(x - 2)\ (x + 2) \longrightarrow +\infty$

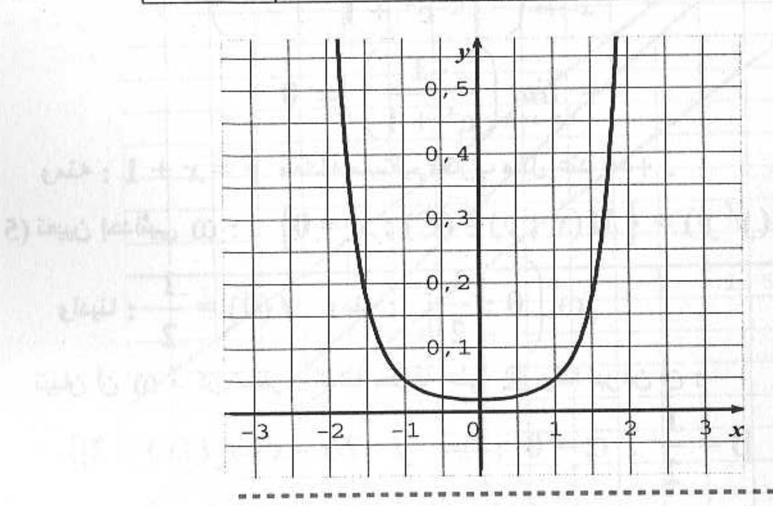
• $f'(x) = [1 \times (x + 2) + 1 \times (x - 2)]e^{(x-1)(x+2)}$

$f(x) = 2x\ .\ e^{(x-2)\ (x+2)}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$2x$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+

f متزايدة تماما على $[0\ ;\ +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty\ ;\ 0]$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f'(x)$	$+\infty \searrow$	e^{-4}	$\nearrow +\infty$



التمرين 12 : -------------------------------------

1) حساب $f'(x)$: $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x\ (e^x + 1) - e^x\ .\ e^x}{(e^x + 1)^2} = 1 + \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

وعليه : $f'(x) > 0$ على $\mathbb{R}$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\dfrac{e^x}{e^x+1}\right) = -\infty$

بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1} = 0$

فإن : $y=x$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$.

3) لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{e^x}{e^x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}\right) = +\infty$$

4 تبيان أن $y=x+1$ معادلة مستقيم مقارب عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{e^x}{e^x+1}-x-1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{e^x+1}\right) = 0$$

ومنه : $y=x+1$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.

5) تعيين إحداثيي ω : $(C)\cap(y'y) = \{M(x\,;y)\in(C) : x=0\}$

ولدينا : $f(0)=\dfrac{1}{2}$ ومنه : $\omega\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$

تبيان أن ω مركز تناظر : الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ ولذا نبرهن أن :

$$f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta \quad \text{حيث :} \quad \alpha=0\ ,\ \beta=\frac{1}{2}$$

أي نبرهن أن : $f(-x)+f(x)=1$ لدينا :

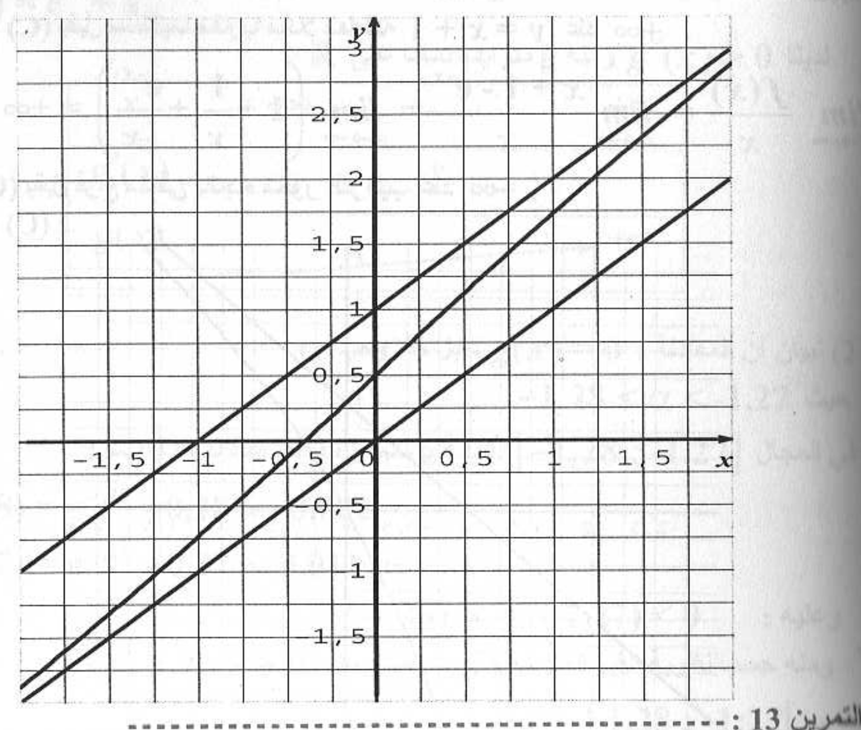
$$f(-x)+f(x) = -x+\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}+x+\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^x+1}+\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$= \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1}+\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{1+e^x}+\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1}{e^x+1} = 1$$

ومنه $\omega\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تناظر (C)

6) إنشاء (C) :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$



التمرين 13 : ------------------------------------

1) دراسة تغيرات الدالة f :

- $D_f = \left]-\infty\,;+\infty\right[$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+1-e^{-x}\right) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x + 1 - e^{-x}) = +\infty$$

• $f'(x) = 1 + e^{-x}$

ومنه $f'(x) > 0$ على $\mathbb{R}$ ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2) دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة : هناك فرعين لانهائيين.

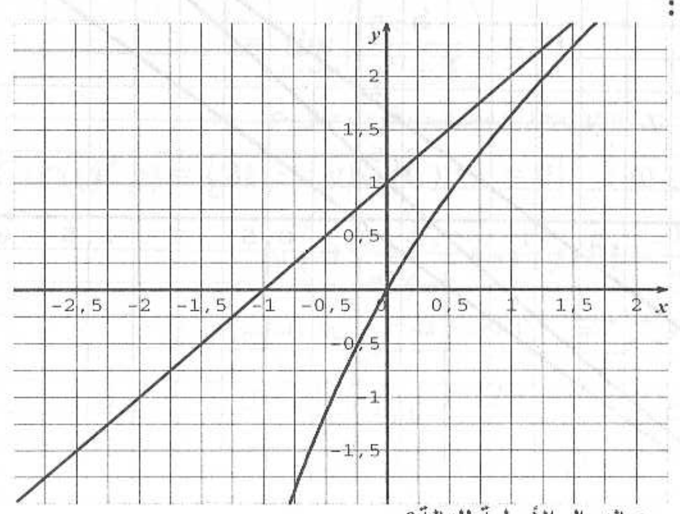
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x\to+\infty} (-e^{-x}) = 0$$

وعليه (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = x + 1$ عند $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + 1 - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{-x}\right) = +\infty$$

وعليه (C) يقبل فرع مكافئ باتجاه محور التراتيب عند $-\infty$.

3) إنشاء (C) :



4) * تعيين مجموع الدوال الأصلية للدالة f:

$$f(x) = x + 1 - e^{-x}$$

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ وعليه f تقبل دوال أصلية g حيث :

$g(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + e^{-x} + c$ مع c ثابت حقيقي

* تعيين g بحيث : $g(0) = 4$

لدينا : $g(0) = 0 + 0 + 1 + c$ وعليه : $1 + c = 4$ أي $c = 3$.

إذن : $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + e^{-x} + 3$.

التمرين 14 : ------------------------------------

I) لدينا : $g(x) = e^x + x + 1$

1) دراسة تغيرات g :

• $D_g =]-\infty ; +\infty[$

• $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^x + x + 1) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (e^x + x + 1) = +\infty$

• $g'(x) = e^x + 1$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2) تبيان أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $-1,28 < \alpha < -1,27$

في المجال $[-1,28 ; -1,27]$ الدالة g مستمرة و متزايدة تماما ولدينا :

$g(-1,28) = e^{-1,28} - 0,28 \simeq -0,002$

$g(-1,27) = e^{-1,27} - 0,27 \simeq 0,011$

وعليه : $g(-1,28) \times g(-1,27) < 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α حيث : $g(\alpha) = 0$

و $\alpha \in]-1,28 ; -1;27[$

3- استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
g(x)	-	0	+

لدينا : $g(\alpha)=0$ وفي المجال $]\alpha\,;+\infty[$: $g(x)>0$

وفي المجال $]-\infty\,;\alpha[$: $g(x)<0$

II) لدينا : $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+1}$

1) • تبيان أن : $D_f=\mathbb{R}$ ؛ $f'(x)=\frac{e^x\,.\,g(x)}{(e^x+1)^2}$

لدينا : $f'(x)=\frac{(e^x+xe^x)(e^x+1)-e^x\,.\,xe^x}{(e^x+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{e^x\left[(1+x)(e^x+1)-xe^x\right]}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x\left[e^x+1+xe^x+x-xe^x\right]}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x(e^x+x+1)}{(e^x+1)^2}$$

وبالتالي : $f'(x)=\frac{e^x\,.\,g(x)}{(e^x+1)^2}$.

• استنتاج تغيرات الدالة f :

• $D_f=]-\infty\,;+\infty[$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\,e^x}{e^x+1}=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\,e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\,e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+e^{-x}}\right)=+\infty$$

إشارة $f'(x)$: مما سبق $f'(x)$ له نفس إشارة $g(x)$ وعليه :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	0 ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha\,e^x}{e^x+1}$$

2) * تبيان أن : $f(\alpha)=\alpha+1$

لدينا : $g(\alpha)=0$

أي : $e^x+\alpha+1=$ وعليه : $e^x=-\alpha-1$

ومنه : $f(\alpha)=\frac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha-1+1}$ أي : $f(\alpha)=\frac{-\alpha(\alpha+1)}{-\alpha}$

وبالتالي : $f(\alpha)=\alpha+1$.

* استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$

لدينا : $-1{,}28<\alpha<-1{,}27$ ومنه : $-0{,}28<\alpha+1<-0{,}27$

إذن : $-0{,}28<f(\alpha)<-0{,}27$

3) * معادلة المماس (Δ) : $y=f'(0)\,.(x-0)+f(0)$

حيث : $f'(0)=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$; $f(0)=0$

ومنه : $y=\frac{1}{2}(x-0)+0$ وعليه معادلة المماس (Δ) هي : $y=\frac{1}{2}x$

* دراسة الوضعية النسبية لـ (C) و (Δ) :

$$f(x)-y=\frac{x\,e^x}{e^x+1}-\frac{1}{2}x=\frac{2x\,e^x-x(e^x+1)}{2(e^x+1)}=\frac{x(e^x-1)}{2(e^x+1)}$$

لدينا x و (e^x-1) من نفس الإشارة و عليه :

من أجل $x\neq0$: (C) فوق (Δ) ومن أجل $x=0$: (C) يمس (Δ)

4) تبيان أن المستقيم الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب .

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\,e^x-x(e^x+1)}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x+1}$$

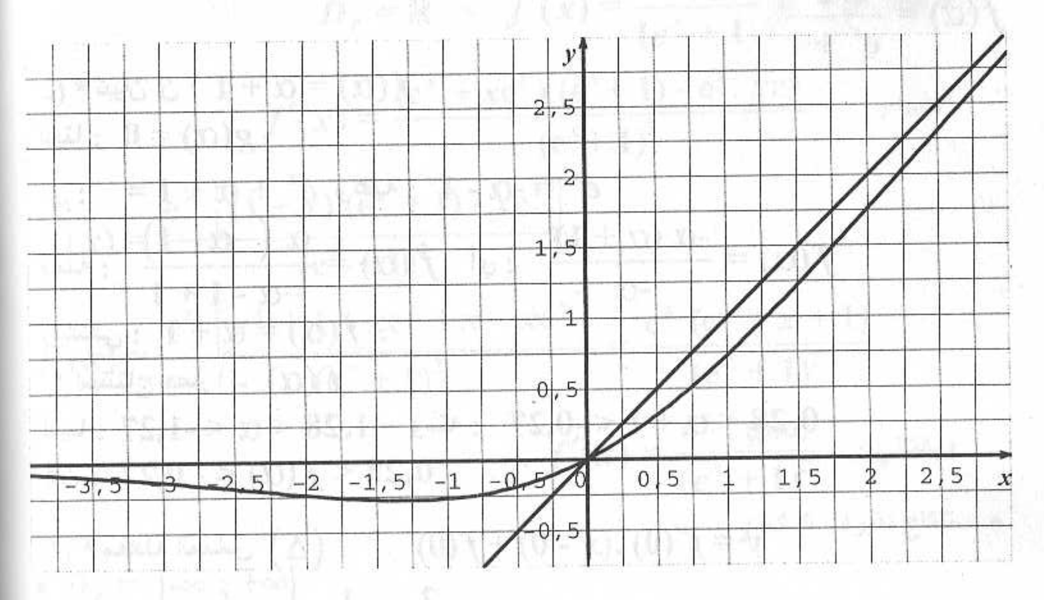
$$=\lim\frac{x\,e^x-x(e^x+1)}{e^x+1}=\lim\frac{-x}{e^x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}} = 0$$

ومنه $y = x$ معادلة المستقيم المقارب المائل عند $+\infty$ للمنحني (C)

5- إنشاء (C) :

لدينا : $y = 0$ معادلة مستقيم مقارب عند $-\infty$.



التمرين 15 : --

1- تعيين a و b :

$A\in(C)$ معناه : $f(0) = 53$ ومنه : $80 + a = 53$ أي : $a = -27$

$B\in(C)$ معناه : $f(3) = 60$ ومنه : $80 - 27e^{3b} = 60$

أي : $27e^{3b} = 20$ إذن : $e^{3b} = \frac{20}{27}$ ومنه : $3b = Ln\,\frac{20}{27}$

أي : $b = \frac{1}{3}\,Ln\,\frac{20}{27}$ و باستعمال آلة حاسبة نجد : $b \simeq -0,1$

ومنه: $f(x) = 80 - 27\,e^{-0,1x}$

2) $U_n = 80 - 27e^{-0,1n}$

- تبيان ان (U_n) متزايد تماما :

$$U_{n+1} - U_n = 80 - 27e^{-0,1(n+1)} - 80 + 27e^{-0,1n}$$

$$= 27\left[e^{-0,1n} - e^{-0,1n-0,1}\right] = 27\,e^{-0,1n}\left[1 - e^{-0,1}\right]$$

لدينا : $1 - e^{-0,1} \simeq 0,095$ إذن : $U_{n+1} - U_n > 0$

ومنه : (U_n) متتالية متزايدة تماما .

- تعيين عدد السنوات بحيث : $U_n > 72$

أي : $80 - 27e^{-01n} > 72$ ومنه : $-27\,e^{-0,1n} > -8$

إذن: $e^{-0,1n} < \frac{8}{27}$ أي : $e^{-0,1n} < 0,3$

ومنه : $-0,1n < Ln\,0,3$ و منه : $n > \frac{-Ln\,0,3}{0,1}$

إذن : $n > 12,039$ ومنه : $n = 13$

إذن ابتداء من 13 سنة يزيد الإنتاج عن 72 .

3) * تبيان أن (V_n) متتالية هندسية :

$$V_{n+1} = e^{-0,1(n+1)} = e^{-0,1n-0,1} = e^{-0,1n} \times e^{-0,1}$$

وعليه : $V_{n+1} = V_n \times e^{-0,1}$

ومنه : (V_n) متتالية هندسية أساسها $e^{-0,1}$ أي : $q = \frac{1}{e^{0,1}}$.

* حساب S :

$$S = V_1 \times \frac{1-q^{12}}{1-q} = e^{-0,1} \times \frac{1-(e^{-0,1})^{12}}{1-e^{-0,1}}$$

و منه : $S = e^{-0,1} \times \frac{1-e^{-1,2}}{1-e^{-0,1}}$.

التمرين 16 : --

1- 1) - تبيان أن : $f(-x)+f(x) = 2$

لدينا : $D_f = \mathbb{R}$

$$f(-x)+f(x) = \frac{3e^{-x}-1}{e^{-x}+1} + \frac{3e^{x}-1}{e^{x}+1} = \frac{\frac{3}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1} + \frac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}$$

$$= \frac{3 - e^x}{1 + e^x} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{3 - e^x + 3e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$= \frac{2e^x + 2}{e^x + 1} = \frac{2\,(e^x + 1)}{e^x + 1}$$

ومنه : $f(-x) + f(x) = 2$.

- استنتاج وجود مركز تناظر :

لدينا : $f(-x) + f(x) = 2$ ومنه : $f(2\times 0 - x) + f(x) = 2 \times 1$

وعليه هي من الشكل : $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$

ومنه النقطة $\omega\ (0\ ;\ 1)$ مركز تناظر للمنحنى (Γ) .

2) - حساب النهايات : $D_f =]-\infty\ ;\ +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x \times \left(3 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \times \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = 3$$

- استنتاج معادلات المستقيمات المقاربة :

بما أن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

فإن : $y = -1$ معادلة المستقيم المقارب عند $-\infty$.

بما أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$ فإن : $y = 3$ معادلة مستقيم مقارب عند $+\infty$.

3) - حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{3\,e^x\ (e^x + 1) - e^x\ (3e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x\ (3e^x + 3 - 3e^x + 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x\ (4)}{(e^x + 1)^2} = \frac{4\,e^x}{(e^x + 1)^2}$$

- استنتاج التغيرات :

لدينا : $f'(x) > 0$ وعليه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	-1 ↗ 3

4) معادلة المماس (Δ) : $y = f'(0).(x - 0) + f(0)$

لدينا : $f'(0) = 1 \quad ; \quad f(0) = 1$

إذن : $y = 1(x - 0) + 1$ وعليه : $y = x + 1$ هي معادلة (Δ) .

5) تبيان أن : $g'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$

لدينا : $D_f = \mathbb{R}$ و $g'(x) = f'(x) - 1$

$$g'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} - 1 = \frac{4e^x - (e^x + 1)^2}{(e^x + 1)^2} = \frac{4e^x - e^{2x} - 2e^x - 1}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{-(e^{2x} - 2e^x + 1)}{(2^x + 1)^2} = \frac{-(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

ومنه $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

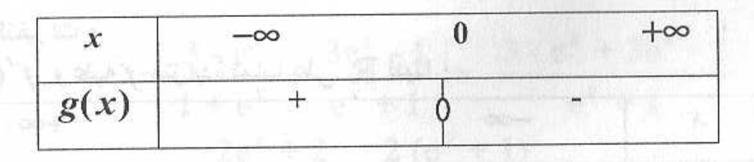
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - (x + 1)\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - (x + 1)\right] = -\infty$$

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	-
$g(x)$	$+\infty$ ↘ 0 ↘ $-\infty$

إشارة $g(x)$: $g(0) = f(0) - 1 = 0$

لدينا :



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

- استنتاج الوضعية النسبية للمنحنى (Γ) و (Δ) :

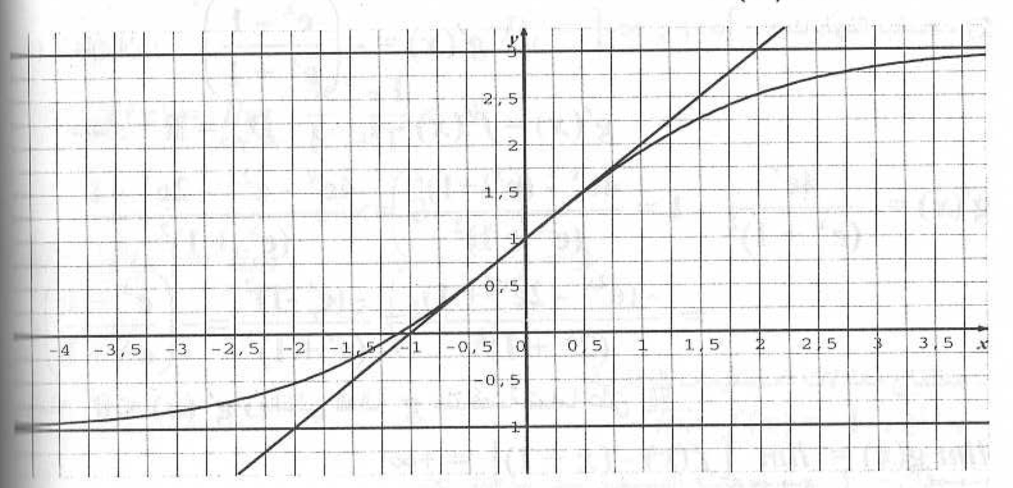
$$f(x) - y = f(x) - (x+1) = g(x)$$

ومنه : (Γ) يقطع (Δ) في النقطة $A\ (0\ ;\ 1)$

في المجال $]-\infty\ ;\ 0[$: (Γ) يقطع فوق (Δ)

في المجال $]0\ ;\ +\infty[$: (Γ) يقطع تحت (Δ) .

6) إنشاء (Δ) و (Γ) :



II- 1) تبيان أن المعادلة : $f(x) = x$ تكافئ $g(x) = -1$

$f(x) = x$ تكافئ : $g(x) = x - (x+1)$ وعليه : $g(x) = -1$

2) تبيان أن (D) يقطع (Γ):

نحل المعادلة : $f(x) = x$ أي $g(x) = -1$

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

حيث : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

ومنه g تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ وعليه المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا.

ولدينا : $g(3) = f(3) - 4$ أي : $g(3) \simeq -1,1$

$g(2) = f(2) - 3$ أي : $g(2) \simeq -0,4$

وبما أن : $g(3) < -1 < g(2)$ فإن : $2 < \alpha < 3$

إذن (D) يقطع (Γ) في نقطة فاصلتها α مع $2 < \alpha < 3$

III- 1) تبيان أن :
$$f'(x) = 4\left[\frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{(e^x+1)^2}\right]$$

لدينا :
$$4\left(\frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{(e^x+1)^2}\right) = 4 \times \left[\frac{e^x+1-1}{(e^x+1)^2}\right]$$

ومنه :
$$4\left(\frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{(e^x+1)^2}\right) = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} = f'(x)$$

2) تبيان أن : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

لدينا : $2 \leq x \leq 3$ ومنه : $e^2 \leq e^x \leq e^3$

ومنه : $e^2+1 \leq e^x+1 \leq e^3+1$

ومنه :
$$\frac{1}{e^2+1} \geq \frac{1}{e^x+1} \geq \frac{1}{e^3+1}$$

ومنه :
$$\frac{4}{e^3+1} \leq \frac{4}{e^x+1} \leq \frac{4}{e^2+1}$$

ولدينا :
$$f'(x) = 4\left[\frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{(e^x+1)^2}\right]$$

ولدينا :
$$\frac{4}{e^x+1} \leq \frac{4}{(e^x+1)^2} \leq \frac{4}{e^x+1}$$

ومنه :
$$4\left(\frac{4}{e^x+1} - \frac{4}{(e^x+1)^2}\right) \leq \frac{4}{e^x+1}$$

أي أن :
$$0 < f'(x) \leq \frac{4}{e^x+1}$$

ومنه :
$$0 < f'(x) \leq \frac{4}{e^x+1} \leq \frac{4}{e^2+1}$$

أي : $0 < f'(x) \leq \frac{4}{e^2+1}$ لكن : $\frac{4}{e^x+1} \simeq 0,48$

ومنه : $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$ ومنه : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

6 – الدالة اللوغاريتمية النيبرية

1- اللوغاريتم النيبيري لعدد :

مبرهنة 1 :

من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث :

$e^{\alpha} = a$. العدد α يسمى اللوغاريتم النيبيري للعدد a و نكتب : $\alpha = ln\ a$.

مثال : العدد α بحيث : $e^{\alpha} = 5$ هو : $\alpha = ln 5$

أي أن : $e^{ln 5} = 5$

نتائج :

- بما أن $e^{0} = 1$ فإن : $ln 1 = 0$.
- من أجل كل عدد حقيقي موجب a : $e^{ln a} = a$.
- من أجل كل عدد حقيقي a : $ln\ (e^{a}) = a$.

مبرهنة 2 :

من أجل كل عددان حقيقيان موجبان تماما a و b :

$$ln\ (a \times b) = ln(a) + ln(b)$$

نتائج :

a و b أعداد حقيقية موجبة تماما ، r عدد ناطق

1) $ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$ 2) $ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = - ln(a)$

3) $ln a^{r} = r\ ln a$.

أمثلة :

* $ln 6 = ln\ (2 \times 3) = ln 2 + ln 3$ * $ln\ \dfrac{2}{3} = ln 2 - ln 3$

* $ln\ \dfrac{1}{5} = - ln 5$ * $ln 16 = ln 2^{4} = 4 ln 2$

* $ln\sqrt{2} = ln 2^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} ln 2$

2- الدالة اللوغارتمية النيبيرية :

نسمي دالة اللوغاريتم النيبيري الدالة ln التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0 ; +\infty[$ العدد الحقيقي $ln\ x$.

مبرهنة 3 :

الدالة $ln x$ حيث x تقبل الاشتقاق على $]0 ; +\infty[$.

- الدالة $x \mapsto ln x$ هي الدالة الأصلية التي تنعدم عند 1 للدالة : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

مبرهنات :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} ln x = +\infty$

2) $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} ln x = -\infty$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln\ (x+1)}{x} = 1$ أو $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln x}{x - 1} = 1$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln x}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln x}{x^{n}} = 0\ ;\ n \in \mathbb{N}^{*}$.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} x ln x = 0$ $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} x^{n}\ ln x = 0\ ;\ n \in \mathbb{N}^{*}$.

مبرهنة 4 :

مشتقة الدالة : $x \mapsto ln\ [u(x)]$ حيث u دالة موجبة تماما وتقبل الاشتقاق على المجال I

هي الدالة : $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

مثال:

مشتقة الدالة $x \mapsto ln\ (x^{2} - 4)$ على كل من المجالين $]-\infty ; -2[$ و $]2 ; +\infty[$

هي الدالة : $x \mapsto \dfrac{2x}{x^{2} - 4}$.

مبرهنة 5 :

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ حيث u دالة موجبة على مجال I

هي الدالة : $x \mapsto ln\left(u(x)\right) + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$.

مثال :

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{2x}{x^{2} - 1}$ على المجال $]1 ; +\infty[$

هي الدالة : $x \mapsto ln\left(x^{2} - 1\right) + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$

3- الدالة اللوغاريتمية العشرية :

الدالة $x \mapsto \dfrac{ln x}{ln 10}$ تسمى الدالة اللوغارتمية العشرية و نرمز لها بالرمز Log

أي أن : $Logx = \dfrac{lnx}{ln10}$ إذن : $Logx = \dfrac{1}{ln10} lnx$

مبرهنات :

a و b عددان حقيقيان موجبان تماما r عدد ناطق :

1) $Log\,(a \times b) = Loga + Logb$

2) $Log\,\dfrac{a}{b} = Loga - Logb$

3) $Loga^r = r\,Loga$

4) مشتق الدالة Log :

بوضع : $f(x) = Log\,x$ نجد : $f(x) = \dfrac{1}{ln10} \times lnx$

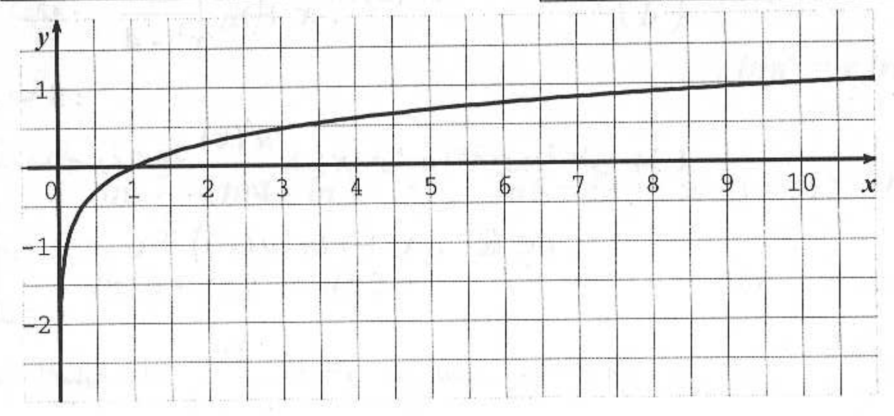
ومنه : $f'(x) = \dfrac{1}{ln10} \times \dfrac{1}{x}$

ومنه : $f'(x) > 0$ وعليه f متزايدة تماما .

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{ln10} . ln\,x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{ln10} \times lnx = +\infty$$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$



التمـــــاريـــــن

التمرين 1 :

ضع العلامة √ أماما كل جملة صحيحة و العلامة × أماما كل جملة خاطئة .

1) $ln\,(a+b) = lna + lnb$ حيث a و b عددان موجبان تماما . ☐

2) $ln\,(2a) = ln2 + lna$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما . ☐

3) $(lnx)^n = \text{nlnx}$ حيث : $x \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$. ☐

4) $lnx > 0$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما . ☐

5) $ln\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\,lnx$ حيث $x \in \mathbb{R}_+^*$. ☐

6) $ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{lnx}{lny}$ حيث x و y عددان حقيقيان موجبان تماما . ☐

7) الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto ln2x$ على $]0\,;+\infty[$.
هي الدالة : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. ☐

8) $ln0 = 1$. ☐

9) $ln2^{2007} = 2007\,ln2$. ☐

10) $ln(-x) = -lnx$ ؛ x عدد حقيقي سالب تماما . ☐

التمرين 2 :

بسط العبارة التالية :

1) $4ln\sqrt{e} - 5\,ln(e^3)$ ؛ 2) $lne\sqrt{e} + \dfrac{lne^4}{lne^{-2}}$

3) $ln(8^{10}) + ln\,\dfrac{1}{256}$ ؛ 4) $ln(100) - ln(0{,}0005)$

5) $ln\,(2 \times 10^8) - ln\,(10^{-5})$.

التمرين 3 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $ln\,(x+6) + ln\,(x+7) = ln42$
2) $ln\,(x-1) + ln\,(x-4) = ln(x^2 - 9)$
3) $ln\,|x+4| + ln\,|x+1| = ln\,|x^2 - 4|$
4) $ln\,(2x-1) - ln\,(x+1) = ln2x$
5) $(lnx)^2 - 7lnx + 12 = 0$

6) $16\,(lnx)^2 = 81$

التمرين 4 :

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $lnx > -1$ ؛ 2) $ln\,2x < 1$

3) $ln\,(x+3) \geq 4$ ؛ 4) $x\,lnx - x < 0$

5) $ln(x^2) - 4 \leq 0$ ؛ 5) $-(lnx)^2 + 3lnx + 4 \leq 0$

التمرين 5 :

حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ الجملة الآتية :

1) $\begin{cases} x + y = 40 \\ lnx + lny = Ln300 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} ln\,(x-2) + ln\,(y-1) = 8 \\ ln\,(x-2) - ln\,(y-1) = 4 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} ln(xy^2) = 1 \\ ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = -4 \end{cases}$

التمرين 6 :

دون استعمال الآلة الحاسبة ادرس إشارة كل من A , B , C , D .

1) $A = 5\,ln7 - 6\,ln9$ 2) $B = \dfrac{1}{2}\,ln5 - ln3$

3) $C = \dfrac{ln7}{ln11}$ 4) $D = ln\left(\sqrt{3} - 1\right)$

ثم احسب القيم المقربة إلى 10^{-3} لكل منهما باستعمال آلة حاسبة.

التمرين 7 :

عين مشتقة الدالة f في كل حالة مما يلي على المجال I .

1) $f(x) = -x\,lnx + x - \dfrac{1}{x}$; $I =]0\,;+\infty[$

2) $f(x) = (x^2 - 1)\,lnx + x^2$; $I =]0\,;+\infty[$

3) $f(x) = \dfrac{lnx}{x}$; $I =]0\,;+\infty[$

4) $f(x) = ln\,(x^2 - 4)$; $I =]2\,;+\infty[$

5) $f(x) = \dfrac{1}{lnx}$; $I =]1\,;+\infty[$

6) $f(x) = ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$; $I =]-\infty\,;-2[$

7) $f(x) = (x\,lnx)^2$; $I =]0\,;+\infty[$

8) $f(x) = ln\,(sinx)$; $I =]0\,;\pi[$

3) $f(x) = ln\,(1 + cosx)$; $I = \mathbb{R}$

10) $f(x) = ln\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$; $I =]0\,;+\infty[$

التمرين 8 :

احسب نهايات الدوال الآتية عند أطراف المجال I في كل حالة مما يلي :

1) $f(x) = \dfrac{-4}{x} + 3lnx$; $I =]0\,;+\infty[$

2) $g(x) = -x^2 + 2lnx$; $I =]0\,;+\infty[$

3) $h(x) = (4 - x)\,lnx$; $I =]0\,;+\infty[$

4) $T(x) = \dfrac{1}{lnx}$; $I =]1\,;+\infty[$

5) $S(x) = ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$; $I =]1\,;+\infty[$

6) $p(x) = \dfrac{ln\,(x^2 + x + 4)}{x}$; $I = \mathbb{R}^*$

7) $L(x) = x\,ln(x^2)$; $I =]-\infty\,;0[$

8) $M(x) = \sqrt{x}\,lnx$; $I =]0\,;+\infty[$

9) $Q(x) = ln\,(4x - 1) - lnx$; $I = \left]\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$

10) $R(x) = \dfrac{ln\,(x+1)}{ln\,(x-1)}$; $I =]2\,;+\infty[$

التمرين 9 :

ادرس تغيرات كل من الدوال f المعرفة كما يلي ثم مثلها بآلة بيانية :

1) $f(x) = ln\,(1 - x)$ 2) $f(x) = ln\left(\dfrac{2}{x-2}\right)$

3) $f(x) = ln\,|x - 4|$ 4) $f(x) = ln\,(2x - 4)^2$

5) $f(x) = \dfrac{1}{x} + lnx$ 6) $f(x) = \dfrac{1}{1 - lnx}$

7) $f(x) = ln\left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right|$ 8) $f(x) = \dfrac{x}{x - 1} - ln\,|x - 1|$

التمرين 10 :

عين على المجال I الدوال الأصلية لكل دالة مما يلي :

1) $f(x) = \dfrac{1}{x + 4} - \dfrac{1}{x - 2}$; $I =]2 ; +\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{1}{3x + 2}$; $I = \left]\dfrac{-2}{3} ; +\infty\right[$

3) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x + 5}$; $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \dfrac{cosx}{\sin x}$; $I =]0 ; \pi[$

5) $f(x) = \dfrac{lnx}{x}$; $I =]0 ; +\infty[$

6) $f(x) = \dfrac{1}{x\,lnx}$; $I =]0 ; 1[$

7) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$; $I =]-\infty ; +\infty[$

8) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $I = \mathbb{R}$

التمرين 11 :

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 18x + 39}{x^2 - 9x + 20}$.

1) عين D مجموعة تعريف الدالة f .

2) عين ثلاثة أعداد حقيقية a , b , c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من D

تكون : $f(x) = a + \dfrac{b}{x - 4} + \dfrac{c}{x - 5}$

3) عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]5 ; +\infty[$.

4) عين الدالة الأصلة التي تنعدم عند $x = 6$.

التمرين 12 :

I - لتكن الدالة g المعرفة عل $]0 ; +\infty[$ بالعبارة :

$$g(x) = x\,lnx - x + 1$$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i} , \vec{j})$ ، الوحدة 2 cm .

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) ادرس إشارة $g(x)$.

3) ليكن (C') التمثيل البياني للدالة $x \mapsto lnx$ في المعلم السابق . بين أن (C) و (C') يشتركان في نقطتين فاصلتهما 1 و e و أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1 ; e]$ فإن : $x\,lnx - x + 1 \leq lnx$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $]1 ; +\infty[$ بالعبارة : $f(x) = \dfrac{1}{x - 1} lnx$.

1) ادرس تغيرات الدالة f . (يمكن كتابة $f'(x)$ بدلالة $g(x)$).

2) أنشئ تمثيلا بيانيا (Γ) للدالة f في المعلم $(O ; \vec{i} , \vec{j})$.

III - 1) بين أن المعادلة $f(x) = \dfrac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α

حيث : $3,5 < \alpha < 3,6$.

2) نعتبر الدالة h المعرفة على $]1 ; +\infty[$ بالعبارة : $h(x) = lnx + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

• بين أن α حلا للمعادلة $h(x) = x$

• ادرس اتجاه تغير الدالة h .

• نضع $I = [3 ; 4]$. بين أنه من أجل كل عدد x من I فإن : $h(x) \in I$

وأن : $|h'(x)| \leq \dfrac{5}{6}$.

3) نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = h(U_n) \quad , \quad n \geq 0 \end{cases}$$

برهن على صحة ما يلي : (من أجل كل عدد طبيعي n)

a) $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{5}{6} |U_n - \alpha|$.

b) $\left|U_n - \alpha\right| \leq \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

c) المتتالية (U_n) متقاربة نحو α .

4) عين عدد طبيعي p بحيث مما سبق نستنتج أن U_p قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد α مبينا قيمة عشرية مقربة إلى 10^{-3} للعدد α .

التمرين 13 :

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بالعبارة : $f(x) = \dfrac{x\, lnx}{x+1}$.

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة 4 cm .

1- بين أن : $f'(x) = \dfrac{lnx + x + 1}{(x+1)^2}$

2- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بالعبارة : $g(x) = lnx + x + 1$

أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال : $]0 ; +\infty[$.

ب) عين إشارة $g(x)$ على $]0 ; +\infty[$. ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f على هذا المجال .

جـ) بين أن : $f(\beta) = -\beta$.

3 - أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$.

ب) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ؟

جـ) نعرف الدالة F على $[0 ; +\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = f(x) & , \quad x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

- ادرس قابلية الاشتقاق للدالة F عند 0 من اليمين .

4- أ) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب) ادرس إشارة $f(x) - lnx$ على المجال $]0 ; +\infty[$.

جـ) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - lnx\right]$.

5- ليكن (Γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto lnx$ أنشئ في نفس المعلم المنحنيان (Γ) و (C) .

التمرين 14 :

I- لتكن f دالة معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بالعبارة :

$$f(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1) ادرس تغيرات الدالة f.

2) استنتج إشارة $f(x)$ على $]0 ; +\infty[$.

II- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بالعبارة : $g(x) = x \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

1) احسب $g'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .

2) لاحظ أن : $g = hok$ حيث h و k دالتين معرفتان على $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

$$h(x) = \frac{Ln(1+x)}{x} \quad ; \quad k(x) = \frac{1}{x}$$

- استنتج نهايات الدالة g .
- ثم استنتج جدول التغيرات .

III- لتكن (U_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بالعبارة : $U_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$

1) احسب $Ln(U_n)$.

2) بين أن (U_n) متزايدة تماما.

3) بين أن (U_n) متقاربة.

التمرين 15 :

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بالعبارة :

$$g(x) = -8\, lnx + x^2 + 4$$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- استنتج إشارة $g(x)$.

3- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بالعبارة : $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2} lnx$

أ) بين أن : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

ب) ادرس تغيرات الدالة f .

II) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بالعبارة : $h(x) = f(x) - lnx$

b) $|U_n - \alpha| \le \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

c) المتتالية (U_n) متقاربة نحو α .

4) عين عدد طبيعي p بحيث مما سبق نستنتج أن U_p قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد α مبينا قيمة عشرية مقربة إلى 10^{-3} للعدد α .

التمرين 13 :

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بالعبارة : $f(x) = \frac{x\ lnx}{x+1}$.

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i} , \vec{j})$ الوحدة 4 cm .

1- بين أن : $f'(x) = \frac{lnx + x + 1}{(x+1)^2}$

2- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بالعبارة : $g(x) = lnx + x + 1$

أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال : $]0 ; +\infty[$.

ب) عين إشارة g(x) على $]0 ; +\infty[$. ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f على هذا المجال .

جـ) بين أن : $f(\beta) = -\beta$.

3 - أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$.

ب) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ؟

جـ) نعرف الدالة F على $[0 ; +\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = f(x) & , \quad x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

- ادرس قابلية الاشتقاق للدالة F عند 0 من اليمين .

4- أ) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب) ادرس إشارة $f(x) - lnx$ على المجال $]0 ; +\infty[$.

جـ) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - lnx]$.

5- ليكن (Γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto lnx$ أنشئ في نفس المعلم المنحنيان (Γ) و (C) .

التمرين 14 :

I- لتكن f دالة معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بالعبارة :

$$f(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1) ادرس تغيرات الدالة f.

2) استنتج إشارة $f(x)$ على $]0 ; +\infty[$.

II- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بالعبارة : $g(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

1) احسب $g'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .

2) لاحظ أن : $g = hok$ حيث h و k دالتين معرفتان على $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

$$h(x) = \frac{Ln(1+x)}{x} \quad ; \quad k(x) = \frac{1}{x}$$

- استنتج نهايات الدالة g .

- ثم استنتج جدول التغيرات .

III- لتكن (U_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بالعبارة : $U_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

1) احسب $Ln(U_n)$.

2) بين أن (U_n) متزايدة تماما.

3) بين أن (U_n) متقاربة.

التمرين 15 :

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بالعبارة :

$$g(x) = -8\ lnx + x^2 + 4$$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- استنتج إشارة $g(x)$.

3- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بالعبارة : $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2} lnx$

أ) بين أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

ب) ادرس تغيرات الدالة f.

II) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بالعبارة : $h(x) = f(x) - lnx$

1- ادرس إشارة $h(x)$.

2- استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (C) للدالة f و المنحنى (Γ) للدالة : $x \mapsto \ln x$.

3- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C) و (Γ)؟

4- أنشئ (C) و (Γ) في معلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 2 cm).
حيث ننشئ المماسين للمنحنيين عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

التمرين 16 :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي : $f(x) = x + 3 + \ln \frac{|x| + 1}{x + 2}$

1- عين مجموعة التعريف D للدالة f.

2- ادرس استمرارية و قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0 .

3- ادرس تغيرات الدالة f .

4- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - x - 3\right)$ ؛ ماذا تستنتج ؟

5- أنشئ التمثيل البياني (C) للدالة f في معلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

التمرين 17 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية :

$$Log\,(x^2 - 1) = Log x \quad ; \quad Log x + Log\,(-x + 5) = Log 4$$

$$Log x - Log(x + 1) = 1$$

التمرين 18 :

ادرس تغيرات كل من الدوال الآتية ذات المتغير الحقيقي x ثم مثلها بيانيا في مستو منسوب إلى معلم متعامد :

1) $f : x \mapsto Log\,|x|$.

2) $g : x \mapsto \frac{1 - Log\,x}{x}$.

3) $h : x \mapsto \frac{Log\,x}{[illegible]}$.

التمرين 19 :

- ادرس تغيرات الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

ال

$$f : x \mapsto (Log\,x)^2$$

- أنشئ (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس .

تمرين 20 :

- ادرس تغيرات الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$f : x \mapsto Log\,(x - 4)\,(1 - x)$$

- أنشئ (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس .

الحلول

التمرين 1 :

1) ×	2) √	3) ×	4) ×
5) √	6) ×	7) √	8) ×
9) √	10) ×		

التمرين 2 :

التبسيط :

$$1)\ 4\ln\sqrt{e} - 5\ln(e^3) = 4\ln e^{\frac{1}{2}} - 3 \times 5 \times \ln e$$
$$= \frac{1}{2} \times 4\,Ln e - 15 \times 1$$
$$= 2 - 15 = -13$$

$$2)\ 4\ln e\sqrt{e} + \frac{\ln e^4}{\ln e^{-2}} = \ln\left(e^1 . e^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{4\ln e}{-2\ln e}$$
$$= \ln e^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{2} = \frac{3}{2}\ln e - 2$$
$$= \frac{3}{2} - 2 = \frac{-1}{2}$$

3) $\ln\left(8^{10}\right)+\ln\left(\frac{1}{256}\right)=10\ .\ \ln 8-\ln(256)$

$=10\times \ln 2^{3}-\ln 2^{7}$

$=3\times 10\ln 2-7\ln 2$

$=30\ln 2-7\ln 2=\ 23\ln 2$

4) $\ln 100-\ln(0{,}0005)=\ln 100-\ln\left(5\times 10^{-4}\right)$

$=\ln(2^{2}\times 5^{2})-\left[\ln 5+\ln 10^{-4}\right]$

$=\ln 2^{2}+\ln 5^{2}-\ln 5-\ln 10^{-4}$

$=2\ln 2+2\ln 5-\ln 5+4\ln 10$

و منه : $\ln 100-\ln(0{,}0005)=2\ln 2+\ln 5+4\ .\left[\ln 2+\ln 5\right]$

$=2\ln 2+\ln 5+4\ln 2+4\ln 5$

$=6\ln 2+5\ln 5$

5) $\ln\left(2\times 10^{8}\right)-\ln\left(10^{-5}\right)=\ln 2+8\ln 10+5\ln 10$

$=\ln 2+13\ln 10$

$=\ln 2+13(\ln 2+\ln 5)$

$=\ln 2+13\ln 2+13\ln 5$

$=14\ln 2+13\ln 5$

التمرين 3 : --

حل المعادلات :

1) لدينا : $\ln(x+6)+\ln(x+7)=\ln 42$

تكون المعادلة معرفة من أجل : $x+6>0$ و $x+7>0$

أي : $x>-6$ و $x>-7$

وعليه مجموعة التعريف : $D=\left]-6\ ;+\infty\right[$.

المعادلة تكافئ : $\ln(x+6)(x+7)=\ln 42$

وعليه : $(x+6)(x+7)=42$

ومنه : $x^{2}+7x+6x+42=42$

أي أن : $x^{2}+13x=0$

ومنه : $x(x+13)=0$ أي $x=0$ أو $x=-13$ (مرفوض)

ومنه : $x=0$. مجموعة حلول المعادلة : $S=\{0\}$.

2) لدينا : $\ln(x-1)+\ln(x-4)=\ln(x^{2}-9)$

أي : $x>1$ و $x>4$ و $x\in\left]-\infty\ ;-3\right[\cup\left]3\ ;+\infty\right[$

و بالتالي : $x>4$. وعليه مجموعة التعريف : $D=\left]4\ ;+\infty\right[$.

المعادلة تكافئ : $\ln(x-1)(x-4)=\ln(x^{2}-9)$

ومنه : $(x-1)(x-4)=x^{2}-9$ أي أن: $x^{2}-5x+4=x^{2}-9$

وعليه : $-5x+4=-9$ أي $-5x=-13$

وبالتالي : $x=\frac{13}{5}$ مرفوض ؛ $S=\phi$.

3) لدينا : $\ln|x+4|+\ln|x+1|=\ln|x^{2}-4|$

تكون المعادلة معرفة من أجل : $x+4\neq 0$ و $x+1\neq 0$

و $x^{2}-4\neq 0$ ومنه : $x\neq -4$ و $x\neq -1$ و $x\neq 2$

و $x\neq -2$ و عليه : $D=\mathbb{R}-\{-4\ ;-2\ ;-1\ ;2\}$.

المعادلة تكافئ : $\ln|(x+4)(x+1)|=\ln|x^{2}-4|$

وعليه : $|(x+4)(x+1)|=|x^{2}-4|$

إذن : $|x^{2}+5x+4|=|x^{2}-4|$

ومنه : $\begin{cases} x^{2}+5x+4=x^{2}-4 \\ \text{أو} \\ x^{2}+5x+4=-x^{2}+4 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 5x=-8 \\ \text{أو} \\ 2x^{2}+5x=0 \end{cases}$

وعليه : $x=\frac{-8}{5}$ أو $x=\frac{-5}{2}$ أو $x=0$.

ومنه مجموعة الحلول : $S=\left\{\frac{-5}{2}\ ;\frac{-8}{5}\ ;0\right\}$

4) لدينا : $\ln(2x-1)-\ln(x+1)=\ln 2x$

تكون المعادلة معرفة من أجل : $x>0$ و $x+1>0$ و $2x-1>0$

أي : $x>0$ و $x>-1$ و $x>\frac{1}{2}$ وعليه : $x>\frac{1}{2}$.

إذن مجموعة التعريف : $D=\left]\frac{1}{2}\ ;+\infty\right[$.

المعادلة تكافئ : $\ln\frac{2x-1}{\ \ }=\ln 2x$

وبالتالي : $\frac{2x - 1}{x + 1} = 2x$ ومنه : $2x - 1 = 2x(x + 1)$

أي : $2x - 1 = 2x^2 + 2x$

و بالتالي : $2x^2 + 1 = 0$ وهي مستحيلة الحل .

5) لدينا : $(lnx)^2 - 7\,lnx + 12 = 0$

تكون معادلة معرفة من أجل : $x > 0$.

و بوضع $\ln x = z$ نجد : $z^2 - 7z + 12 = 0$

لدينا : $\Delta = 1$ ومنه للمعادلة حلين $z_1 = 3$ و $z_2 = 4$

من أجل $z = 3$ نجد : $lnx = 3$ ومنه : $x = e^3$

من أجل $z = 4$ نجد : $lnx = 4$ ومنه : $x = e^4$

مجموع حلول المعادلة : $S = \{e^3 ; e^4\}$

6) لدينا : $16\,(lnx)^2 = 81$

تكون المعادلة معرفة من أجل : $x > 0$

المعادلة تكافئ : $(lnx)^2 = \frac{81}{16}$

وبالتالي : $lnx = \frac{9}{4}$ أو $lnx = -\frac{9}{4}$

وعليه : $x = e^{\frac{9}{4}}$ أو $x = e^{\frac{-9}{4}}$

مجموع الحلول هي : $S = \left\{e^{\frac{-9}{4}} ; e^{\frac{9}{4}}\right\}$.

التمرين 4 : --

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) لدينا : $lnx > -1$

تكون المتراجحة معرفة من أجل : $x > 0$

المتراجحة تكافئ : $lnx > lne^{-1}$ ومنه : $x > e^{-1}$

ومنه مجموعة الحلول : $S =]e^{-1} ; +\infty[$.

2) لدينا : $ln2x < 1$

تكون المتراجحة معرفة من أجل : $x > 0$

المتراجحة تكافئ : $Ln2x < Lne$ وعليه : $2x < e$ أي : $x < \frac{1}{2}e$

لكن : $x > 0$ و منه مجموعة الحلول : $S =]0 ; \frac{1}{2}e[$.

3) لدينا : $ln(x + 3) \geq 4$

تكون المتراجحة معرفة من أجل : $x + 3 > 0$ أي : $x > -3$.

المتراجحة تكافئ : $ln(x + 3) \geq lne^4$

ومنه : $x + 3 \geq e^4$ أي : $x \geq e^4 - 3$

إذن مجموعة الحلول : $S =]e^4 - 3 ; +\infty[$.

4) لدينا : $x\,lnx - x < 0$

تكون المتراجحة معرفة من أجل : $x > 0$.

المتراجحة تكافئ : $x\,(lnx - 1) < 0$

x	0	e	$+\infty$
x	0 +		+
$lnx - 1$	-	0	+
$x(lnx - 1)$	-	0	+

وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة : $S =]e ; +\infty[$

5) لدينا : $lnx^2 - 4 \geq 0$

تكون المتراجحة معرفة من أجل : $x \neq 0$.

المتراجحة تكافئ : $lnx^2 \geq 4$ أي : $lnx^2 \geq lne^4$

و عليه : $x^2 \geq e^4$ أي : $|x| \geq e^2$

و منه : $x \geq e^2$ أو $x \leq -e^2$

إذن مجموعة حلول المتراجحة : $S =]-\infty ; -e^2[\cup]e^2 ; +\infty[$.

6) لدينا : $-(lnx)^2 + 3\,lnx + 4 \leq 0$

تكون المتراجحة معرفة من أجل : $x > 0$

بوضع : $lnx = z$ نجد : $-z^2 + 3z + 4 \leq 0$

نلاحظ : $-1 + 4 = 3$ و منه يوجد جذران هما: $z_1 = -1$ و $z_2 = 4$

وبالتالي : $-z^2 + 3z + 4 = -(z + 1)(z - 4)$ لكن : $x = e^z$

و عليه : $-(lnx)^2 + 3lnx + 4 = -(lnx + 1)(lnx - 4)$

إذن :

x	0		e^{-1}		e^{4}		$+\infty$
$lnx+1$		-	0	+		+	
$lnx-4$		-		-	0	+	
$-(lnx-1)(lnx-4)$		-	0	+	0	-	

و منه مجموعة حلول المتراجحة : $S = \left]0\ ; e^{-1}\right] \cup \left[e^{4}\ ; +\infty\right[$.

التمرين 5 : --

حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ الجمل التالية :

1) لدينا : $\begin{cases} x+y=40 \\ lnx+lny=ln300 \end{cases}$

تكون الجملة معرفة من أجل: $x>0$ و $y>0$

الجملة تكافئ : $\begin{cases} x+y=40 \\ ln(x\ y)=ln300 \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} x+y=40 \\ x\ y=300 \end{cases}$ وبالتالي x و y هما حلين للمعادلة :

$z^2-40z+300=0$. لدينا : $\Delta=1600-1200$ أي : $\Delta=400$

إذن للمعادلة حلين : $z_1=10$ و $z_1=30$.

و بالتالي : $(x\ ;y)=(10\ ;30)$ أو $(x\ ;y)=(30\ ;10)$

مجموعة الحلول : $S=\{(10\ ;30)\ ;(30\ ;10)\}$.

2) لدينا : $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=4 \end{cases}$

تكون الجملة معرفة من أجل : $\dfrac{x}{y}>0$ و $y\neq 0$ أي : $x\ y>0$.

الجملة تكافئ : $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ \dfrac{x}{y}=e^4 \end{cases}$ وعليه : $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x=ye^4 \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} (ye^4)^2+y^2=25 \\ x=ye^4 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} y^2=\dfrac{25}{e^8+1} \\ x=ye^4 \end{cases}$

وبالتالي : $y=\dfrac{5}{\sqrt{e^8+1}}$ أو $y=\dfrac{-5}{\sqrt{e^8+1}}$

لما : $y=\dfrac{5}{\sqrt{e^8+1}}$ فإن : $x=\dfrac{5e^4}{\sqrt{e^8+1}}$

لما $y=\dfrac{-5}{\sqrt{e^8+1}}$ فإن : $x=\dfrac{-5e^4}{\sqrt{e^8+1}}$

إذن مجموع الحلول :

$$S=\left\{\left(\frac{5e^4}{\sqrt{e^8+1}}\ ;\frac{5}{\sqrt{e^8+1}}\right),\left(\frac{-5e^4}{\sqrt{e^8+1}}\ ;\frac{-5}{\sqrt{e^8+1}}\right)\right\}$$

3) لدينا : $\begin{cases} ln\ (x-2)+ln\ (y-1)=8 \\ ln\ (x-2)-ln\ (y-1)=4 \end{cases}$

تكون الجملة معرفة من أجل : $x-2>0$ و $y-1>0$

وعليه : $x>2$ و $y>1$.

الجملة تكافئ : $\begin{cases} ln\ (x-2)+ln\ (y-1)=8\ldots(1) \\ ln\ (x-2)-ln\ (y-1)=4\ldots(2) \end{cases}$

و منه بالجمع نجد : $2ln\ (x-2)=12$ أي : $ln\ (x-2)=6$

و بالتالي : $ln\ (x-2)=lne^6$ و منه : $x-2=e^6$ أي : $x=2+e^6$

و بالتعويض في المعادلة (1) نجد : $ln\ (y-1)=2$

أي : $ln\ (y-1)=lne^2$ و منه : $y-1=e^2$ أي : $y=1+e^2$.

إذن مجموع الحلول : $S=\left\{\left(2+e^6\ ;1+e^2\right)\right\}$.

4) لدينا : $\begin{cases} ln(x\ y^2)=1 \\ ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=-4 \end{cases}$

تكون الجملة معرفة من أجل : $x>0$ و $\dfrac{x}{y}>0$ و $y\neq 0$

ومنه : $x > 0$ و $y > 0$

و الجملة تكافئ : $\begin{cases} ln\ (xy^2) = ln e \\ ln \left(\dfrac{x}{y}\right) = ln e^{-4} \end{cases}$ وعليه : $\begin{cases} xy^2 = e \\ \dfrac{x}{y} = e^{-4} \end{cases}$

أي : $\begin{cases} xy^2 = e \\ x = ye^{-4} \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} y\ .\ e^{-4} \times y^2 = e \\ x = ye^{-4} \end{cases}$

أي : $\begin{cases} y^3 = e^5 \\ x = ye^{-4} \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} x = e^{-3} \times \sqrt[3]{e^2} \\ y = e \times \sqrt[3]{e^2} \end{cases}$

مجموعة الحلول : $S = \left\{ \left(e^{-3} \times \sqrt[3]{e^2}\ ; e \times \sqrt[3]{e^2} \right) \right\}$

التمرين 6 : --

* دراسة الإشارة :

1) لدينا : $A = 5\ ln7 - 6\ ln9$

بما أن : $7 < 9$ فإن : $ln7 < ln9$ ومنه : $5\ ln7 < 6\ ln9$

و بالتالي : $5\ ln7 - 6ln9 < 0$ أي أن : $A < 0$.

2) لدينا : $B = \dfrac{1}{2}\ ln5 - ln3$ أي : $B = ln\sqrt{5} - ln3$

بما أن : $\sqrt{5} < 3$ فإن : $ln\sqrt{5} < ln3$

و بالتالي : $ln\sqrt{5} - ln3 < 0$ أي أن : $B < 0$.

3) لدينا : $C = \dfrac{ln7}{ln11}$

بما أن : $ln7 > 0$ و $ln11 > 0$ فإن : $\dfrac{ln7}{ln11} > 0$

أي : $C > 0$.

4) لدينا : $D = ln\ \left(\sqrt{3} - 1\right)$

بما أن : $\sqrt{3} - 1 < 1$ فإن : $ln\left(\sqrt{3} - 1\right) < ln1$

وعليه : $ln\left(\sqrt{3} - 1\right) < 0$ أي أن : $D < 0$.

* القيم المقربة إلى 10^{-3} لكل من A و B و C و D :

$A \simeq -3,454$ ؛ $B \simeq -0,294$

$C \simeq 0,812$ ؛ $D \simeq -0,312$.

التمرين 7 : --

تعيين المشتقات :

1) لدينا : $f(x) = -xlnx + x - \dfrac{1}{x}$ و منه :

$$f'(x) = -1\ .\ lnx + (-x)\times\frac{1}{x} + 1 - \frac{-1}{x^2}$$

$$f'(x) = -lnx - 1 + 1 + \frac{1}{x^2}$$

إذن : $f'(x) = -lnx + \dfrac{1}{x^2}$.

2) لدينا : $f(x) = (x^2 - 1)\ lnx + x^2$ و منه :

$$f'(x) = 2x\ lnx + (x^2 - 1)\times\frac{1}{x} + 2x$$

$$f'(x) = 2x\ lnx + x - \frac{1}{x} + 2x$$

إذن : $f'(x) = 2x\ lnx + 3x - \dfrac{1}{x}$.

3) لدينا : $f(x) = \dfrac{lnx}{x}$ و منه : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\ .\ x - 1\times lnx}{x^2}$

إذن : $f'(x) = \dfrac{1 - lnx}{x^2}$.

4) لدينا : $f(x) = ln\ (x^2 - 4)$ ومنه : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$.

5) لدينا : $f(x) = \dfrac{1}{lnx}$ و منه : $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}}{(lnx)^2}$

إذن : $f'(x) = \dfrac{-1}{x\ (lnx)^2}$.

6) لدينا : $f(x) = ln\left(\dfrac{x - 2}{x + 2}\right)$

أي : $f(x) = ln|x-2| - ln|x+2|$

و منه : $f'(x) = \dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{1}{x + 2}$ إذن : $f'(x) = \dfrac{4}{(x - 2)\ (x + 2)}$.

7) لدينا : $f(x) = (x\ lnx)^2$ و منه :

$$f'(x) = 2\ (x\ lnx)\left(1 \times lnx + x \times \frac{1}{x}\right)$$

إذن : $f'(x) = 2\ (x\ lnx)(1 + lnx)$.

8) لدينا : $f(x) = ln(\sin x)$ ومنه : $f'(x) = \dfrac{cosx}{\sin x}$.

9) لدينا : $f(x) = ln\ (1 + cosx)$ ومنه : $f'(x) = \dfrac{-\ \sin x}{1 + cosx}$.

10) لدينا : $f(x) = ln\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$ و منه :

$$f'(x) = \frac{\dfrac{e^x\ (e^x + 1) - e^x\ (e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}}{\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \times \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

إذن : $f'(x) = \dfrac{2\ e^x}{(e^x + 1)\ (e^x - 1)}$.

التمرين 8 : --

حساب النهايات :

1) لدينا : $f(x) = \dfrac{-4}{x} + 3\ lnx$

ومنه : $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(\dfrac{-4}{x} + 3\ lnx\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-4}{x} + 3\ lnx\right) = +\infty$

2) لدينا : $g(x) = -x^2 + 2\ lnx$

ومنه : $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(-x^2 + 2\ lnx\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^2 + 2\ lnx\right)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x + \dfrac{2\ lnx}{x}\right) = -\infty$

3) لدينا : $h(x) = (4 - x)\ lnx$

و منه : $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} h(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} (4 - x)\ lnx = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (4 - x)\ lnx = -\infty$

4) لدينا : $T(x) = \dfrac{1}{Lnx}$

ومنه : $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} T(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} \dfrac{1}{lnx} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} T(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{lnx} = 0$

5) لدينا : $S(x) = ln\left(\dfrac{x - 1}{x}\right)$

و منه : $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} S(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} ln\left(\dfrac{x - 1}{x}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} Ln\left(\dfrac{x - 1}{x}\right) = 0$

6) لدينا : $p(x) = \dfrac{ln\ (x^2+x+4)}{x}$

و منه : $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{ln\ (x^2+x+4)}{x}$

و منه : $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{ln\left[x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)\right]}{x}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{lnx^2 + ln\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2ln|x|}{x} + \frac{ln\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{-2ln\ (-x)}{-x} + \frac{1}{x}\ ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\right] = 0$$

و بالمثل نجد :

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2ln\ (x)}{x} + \frac{1}{x}\ ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\right] = 0$$

7) لدينا : $L(x) = x\ ln(x^2)$ أي : $L(x) = 2\,x\ ln|x|$ ومنه :

$$\lim_{x\to-\infty} L(x) = \lim_{x\to-\infty} 2 \times ln\ (-x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}} L(x) = \lim_{\substack{x\to0\\<}} 2\,xLn\ (-x)$$

$$= \lim_{\substack{x\to0\\<}} (-2)\ (-x)ln(-x)[\ \ ] = 0$$

8) لدينا : $M(x) = \sqrt{x}\ lnx$

ومنه : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} M(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \sqrt{x}\ Lnx$

$$= \lim_{\substack{x\to0\\>}} \sqrt{x}\ ln\left(\sqrt{x}\right)^2$$

$$= \lim_{\substack{x\to0\\>}} 2\left(\sqrt{x}\right)\ ln\left(\sqrt{x}\right) = 0$$

و بالمثل نجد : $\lim\limits_{x\to+\infty} M(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\left(\sqrt{x}\right)\ ln\left(\sqrt{x}\right) = +\infty$

9) لدينا : $Q(x) = ln\ (4x-1) - lnx$

و منه : $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{4}\\>}} Q(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{4}\\>}} \left[ln\ (4x-1) - lnx\right] = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} Q(x) = \lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{4x-1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} ln\left(4-\frac{1}{x}\right) = ln4$$

10) لدينا : $R(x) = \dfrac{ln\ (x+1)}{ln\ (x-1)}$

و منه : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} R(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} \dfrac{ln\ (x+1)}{ln\ (x-1)} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} R(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{Ln\ (x+1)}{Ln\ (x-1)} - 1 + 1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{ln\ (x+1) - ln\ (x-1)}{ln\ (x-1)} + 1\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}{ln\ (x-1)} + 1\right) = 1$$

التمرين 9 : --

دراسة اتجاه تغير الدوال :

1) لدينا : $f(x) = ln(1-x)$

- مجموعة التعريف : $D_f = \{x\in\mathbb{R} : 1-x>0\}$

إذن : $x<1$ ومنه : $D_f =]-\infty\ ;1[$.

- حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} ln(1-x) = +\infty$$

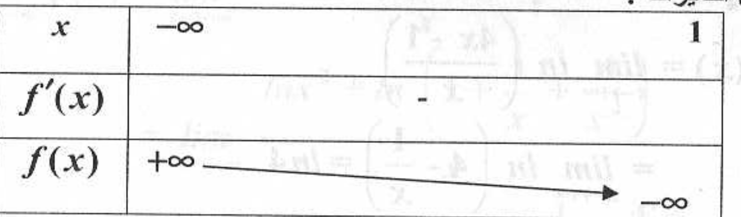
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \ln(1 - x) = -\infty$$

- تعيين المشتق : $f'(x) = \dfrac{-1}{1 - x}$

إذن : $f'(x) < 0$ لأن : $1 - x > 0$.

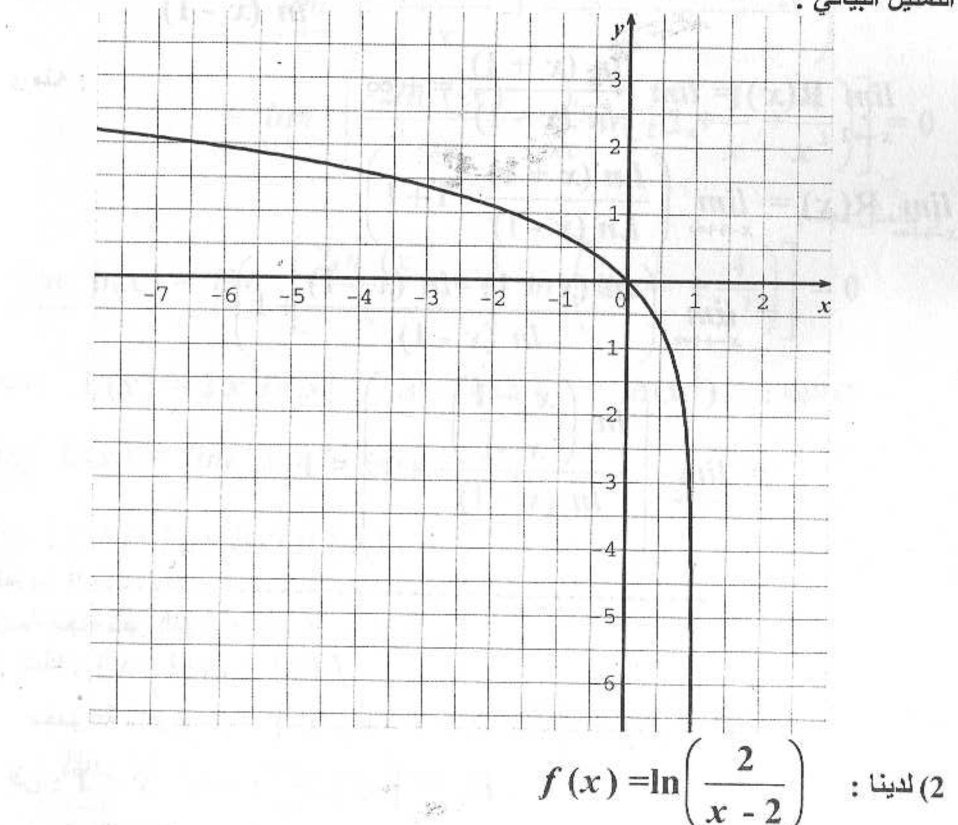
وعليه f متناقصة تماما على D_f .

- جدول التغيرات :



x	$-\infty$	1
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

التمثيل البياني :



2) لدينا : $f(x) = \ln\left(\dfrac{2}{x - 2}\right)$

- مجموعة التعريف : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 > 0\}$

إذن : $D_f =]2 ; +\infty[$.

- حساب النهايات :

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \ln\left(\frac{2}{x - 2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2}{x - 2}\right) = -\infty$$

- تعيين المشتق :

$$f'(x) = \frac{\dfrac{-2}{(x-2)^2}}{\dfrac{2}{x-2}} = \frac{-2}{(x-2)^2} \times \frac{x-2}{2}$$

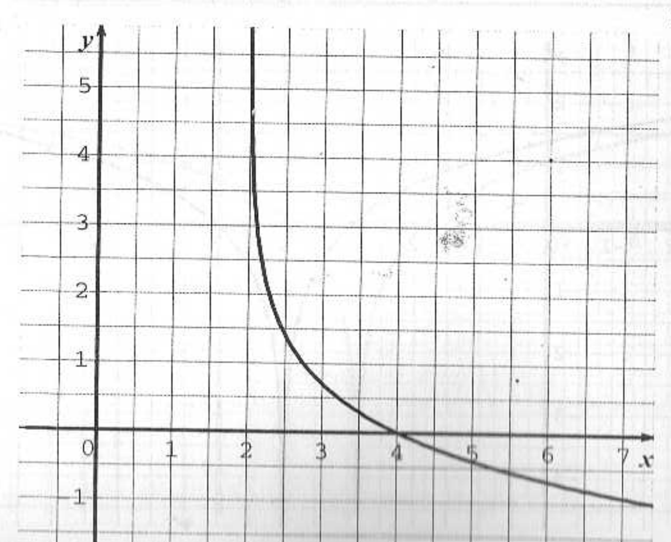
إذن : $f'(x) = \dfrac{-1}{x - 2}$

وعليه : $f'(x) < 0$ لأن : $x - 2 > 0$ و بالتالي f متناقصة تماما على D_f .

- جدول التغيرات :

x	2	$-\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

التمثيل البياني :



3) لدينا : $f(x) = ln|x - 4|$

- مجموعة التعريف : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 4 \neq 0\}$

و بالتالي : $D_f =]-\infty ; 4[\cup]4 ; +\infty[$.

- حساب النهايات :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} ln|x - 4| = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} ln|x - 4| = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} ln|x - 4| = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} ln|x - 4| = +\infty$$

- تعيين المشتق : $f'(x) = \dfrac{1}{x - 4}$

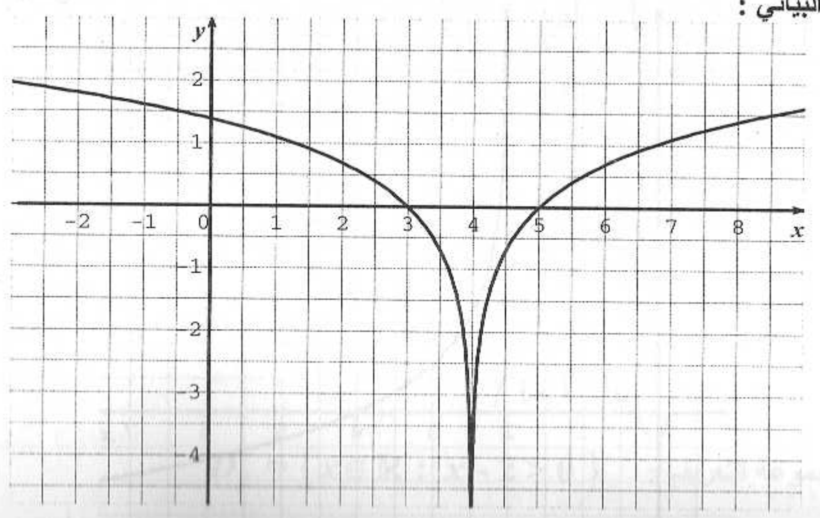
من أجل $x > 4$: $f'(x) > 0$ وعليه f متزايدة تماما .

من أجل $x < 4$: $f'(x) < 0$ وعليه f متناقصة تماما .

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	‖	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

التمثيل البياني :



4) لدينا : $f(x) = ln(2x - 4)^2$ أي : $f(x) = 2ln|2x - 4|$

- مجموعة التعريف : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 4 \neq 0\}$

و منه : $D_f =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$.

- حساب النهايات :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2ln|2x - 4| = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} 2ln|2x - 4| = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} 2ln|2x - 4| = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2ln|2x - 4| = +\infty$$

- تعيين المشتق : $f'(x) = 2 \times \dfrac{2}{2x - 4}$ أي : $f'(x) = \dfrac{2}{x - 2}$.

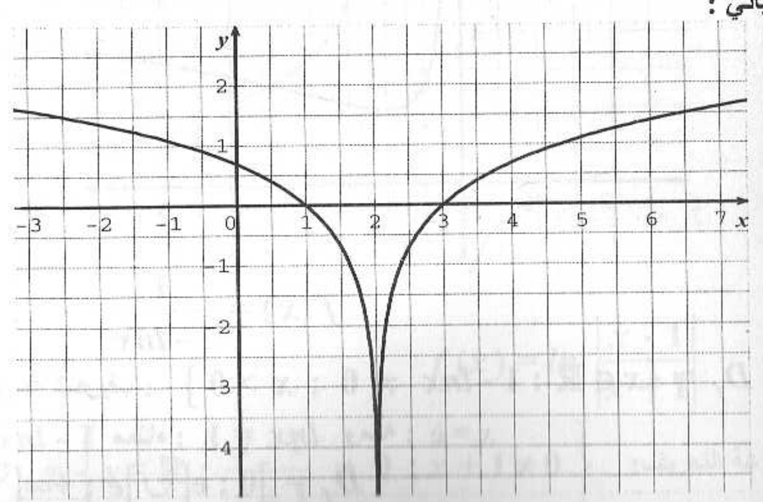
من أجل $x > 2$: $f'(x) > 0$ وعلية f متزايدة تماما .

من أجل $x < 2$: $f'(x) < 0$ وعلية f متناقصة تماما .

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	‖	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

التمثيل البياني :



5) لدينا : $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$

• مجموعة التعريف : $D_f=]0\,;+\infty[$

• حساب النهايات :

$$\lim_{\substack{>\\x\to0}} f(x)=\lim_{\substack{>\\x\to0}}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)=\lim_{\substack{>\\x\to0}}\frac{1+x\ln x}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)=+\infty$$

• تعيين المشتق : $f'(x)=\frac{-1+x}{x^2}$

من أجل $x=1$: $f'(x)=0$

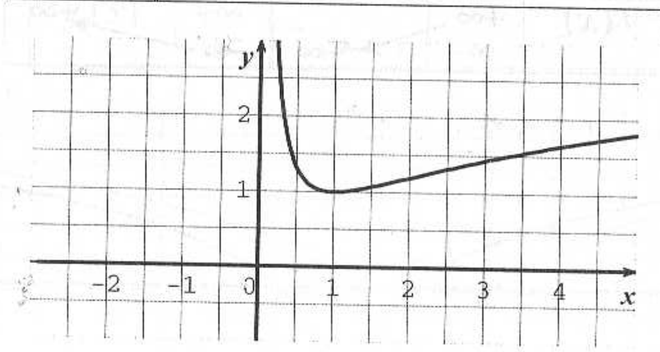
من أجل $x>1$: $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة تماما

من أجل $x<1$: $f'(x)<0$ ومنه f متناقصة تماما

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

التمثيل البياني :



6) لدينا : $f(x)=\frac{1}{1-\ln x}$

• مجموعة التعريف : $D_f=\{x\in\mathbb{R} : 1-\ln x\neq 0\ ;\ x>0\}$

$1-\ln x=0$ معناه : $\ln x=1$ ومنه : $x=e$

إذن : $D_f=]0\,;e[\cup]e\,;+\infty[$

$$\lim_{\substack{>\\x\to0}} f(x)=\lim_{\substack{>\\x\to0}}\frac{1}{1-\ln x}=0$$

$$\lim_{\substack{<\\x\to e}} f(x)=\lim_{\substack{<\\x\to e}}\frac{1}{1-\ln x}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{>\\x\to e}} f(x)=\lim_{\substack{>\\x\to e}}\frac{1}{1-\ln x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\ln x}=0$$

• تعيين المشتق : $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}}{(1-Lnx)^2}=\frac{1}{x\,(1-Lnx)^2}$

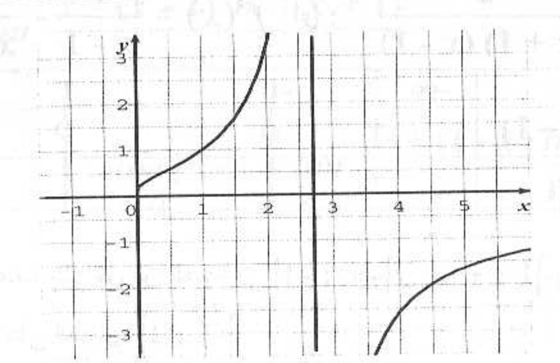
وعليه : $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة تماما على كل من المجالين :

$]0\,;e[$ و $]e\,;+\infty[$

• جدول التغيرات :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗ 0

• التمثيل البياني :



7) لدينا : $f(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

• مجموعة التعريف: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R} : \frac{x-1}{x+1}\neq 0\ ;\ x+1\neq 0\right\}$

أي : $x \neq 1$ و $x \neq -1$

إذن : $D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

• حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 0$$ ؛ لأن : $\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \longrightarrow 1$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\<}} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = +\infty$$ ؛ لأن : $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\>}} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = +\infty$$ ؛ لأن : $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\<}} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = -\infty$$ ؛ لأن : $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \overset{>}{\longrightarrow} 0$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\>}} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = -\infty$$ ؛ لأن : $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \overset{>}{\longrightarrow} 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 0$$ ؛ لأن : $\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \longrightarrow 1$

• تعيين المشتق :

لدينا : $f(x) = \ln|x-1| - \ln|x+1|$

و منه : $f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ أي : $f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(x+1)(x-1)$		+	0	-	0	+	
$f'(x)$		+	‖	-	‖	+	

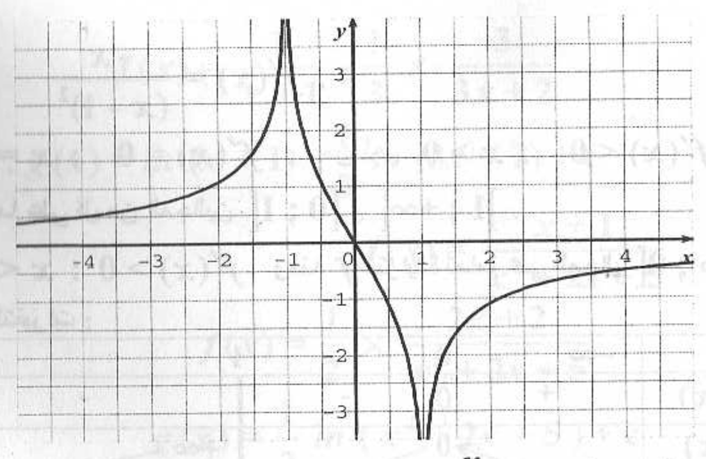
الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty ; -1[$ و $]1 ; +\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $]-1 ; 1[$

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	-	‖	+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

• التمثيل البياني :



8) لدينا : $f(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$

• مجموعة التعريف : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\}$

و منه : $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

• حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{x-1} - Ln|x-1|\right) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\<}} \left(\frac{x}{x-1} - \ln(-x+1)\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to1\\<}} \frac{x - (x-1)\ln(-x+1)}{x-1}$$

و منه :

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\<}} \frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x-1} = -\infty$$

و بالمثل نجد :

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{x - (x-1)\ln(x-1)}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x-1} - \ln(x-1)\right) = -\infty$$

• تعيين المشتق :

$$f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-1-(x-1)}{(x-1)^2}$$

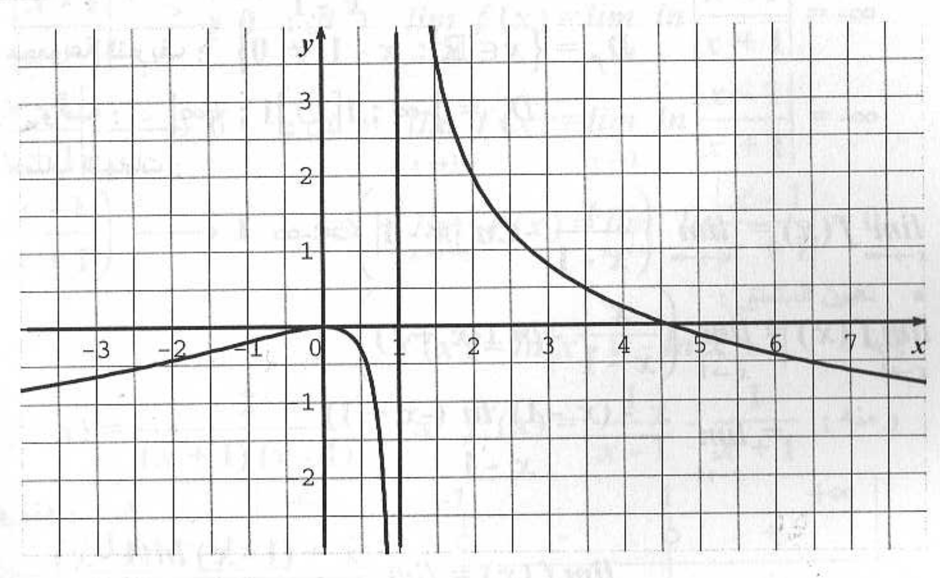
إذن : $f'(x) = \dfrac{-x}{(x-1)^2}$.

من أجل $x = 0$: $f'(x) = 0$. من أجل $x > 0$: $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة تماما على كل من المجالين $[0 ; 1[$ و $]1 ; +\infty[$.

من أجل $x < 0$: $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما على المجال $]-\infty ; 0[$.

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$



التمرين 10 : --

تعيين الدوال الأصلية g لكل دالة f وليكن c ثابت حقيقي .

1) لدينا : $f(x) = \dfrac{1}{x+4} - \dfrac{1}{x-2}$

ومنه : $g(x) = ln\ (x+4) - ln\ (x-2) + c$

أي : $g(x) = ln\left(\dfrac{x+4}{x-2}\right) + c$.

2) لدينا : $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{3x+2}$

ومنه : $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{3x+2}$

و بالتالي : $g(x) = ln\ (x+1) - \dfrac{1}{3}\ ln\ (3x+2) + c$.

3) لدينا : $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+5}$

ومنه : $f(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x+2}{x^2+2x+5}$

و بالتالي : $g(x) = \dfrac{1}{2}\ ln\ (x^2+2x+5) + c$

4) لدينا : $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

وعليه : $g(x) = ln\ (\sin x) + c$.

5) لدينا : $f(x) = \dfrac{lnx}{x}$ أي : $f(x) = \dfrac{1}{x} \times (lnx)^1$

ومنه : $g(x) = \dfrac{(lnx)^2}{2} + c$

6) لدينا : $f(x) = \dfrac{1}{x\ lnx}$ أي : $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{lnx}$

وعليه : $g(x) = ln\ |lnx| + c$

وبما أن : $I =]0 ; 1[$ فإن : $g(x) = ln\ (-lnx) + c$.

7) لدينا : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

ومنه : $g(x) = ln\ (e^x+1) + c$

8) لدينا : $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

ومنه : $g(x) = \ln\ (e^x + e^{-x}) + C$.

التمرين 11 : --

لدينا : $f(x)=\dfrac{2x^2-18x+39}{x^2-9x+20}$

1) مجموعة التعريف : $D=\left\{x\in\mathbb{R} : x^2-9x+20\neq 0\right\}$

نحل المعادلة : $x^2-9x+20=0$

لدينا : $\Delta=1$ ومنه للمعادلة حلين : $x_1=4$ و $x_2=5$.

ومنه : $D_f=\mathbb{R}-\{4\,;5\}$

2) تعيين a , b , c :

لدينا : $f(x)=a+\dfrac{b}{x-4}+\dfrac{c}{x-5}$

وعليه : $f(x)=\dfrac{a(x-4)(x-5)+b(x-5)+c(x-4)}{(x-4)(x-5)}$

ومنه : $f(x)=\dfrac{a(x^2-9x+20)+bx-5b+cx-4c}{x^2-9x+20}$

إذن : $f(x)=\dfrac{ax^2-9ax+20a+bx-5b+cx-4c}{x^2-9x+20}$

وعليه : $f(x)=\dfrac{ax^2+(-9a+b+c)x+20a-5b-4c}{x^2-9x+20}$

وبالتالي : $\begin{cases}a=2\\-9a+b+c=-18\\20a-5b-4c=39\end{cases}$ أي : $\begin{cases}a=2\\b+c=0\\-5b-4c=-1\end{cases}$

وعليه : $\begin{cases}a=2\\b=-c\\c=-1\end{cases}$ أي أن : $\begin{cases}a=2\\b=+1\\c=-1\end{cases}$

وعليه : $f(x)=2+\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-5}$

3) تعيين مجموعة الدوال الأصلية و لتكن g :

لدينا : $f(x)=2+\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-5}$

وعليه : $g(x)=2x+ln(x-4)-ln(x-5)+c$

ومنه : $g(x)=2x+ln\left(\dfrac{x-4}{x-5}\right)+c$ حيث c ثابت حقيقي .

4) تعيين الدالة الأصلية التي تنعدم عند 6 :

لدينا : $g(x)=2x+ln\left(\dfrac{x-4}{x-5}\right)+c$ وبما أن : $g(6)=0$

فإن : $12+ln\left(\dfrac{2}{1}\right)+c=0$ أي : $12+ln2+c=0$

ومنه : $c=-12-ln2$

إذن : $g(x)=2x+ln\left(\dfrac{x-4}{x-5}\right)-12-Ln2$.

التمرين 12 : --

I- 1) دراسة تغيرات الدالة g :

- مجموعة التعريف : $D_g=]0\,;+\infty[$
- النهايات :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} g(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}(xlnx-x+1)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(xlnx-x+1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(lnx-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

- المشتق و إشارته : $g'(x)=1.\,lnx+x.\dfrac{1}{x}-1=lnx+1-1=lnx$

ومنه :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		-	0	+	
$g'(x)$		-	0	+	

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1\,;+\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $]0\,;1]$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$g(1) = 1 \,.\, Ln\, 1 - 1 + 1 = 0$$

2) دراسة إشارة $g(x)$:

من جدول التغيرات نلاحظ أن : $g(x) = 0$ من أجل $x = 1$.

من أجل كل عدد حقيقي x من $]0\,;\,1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$: $g(x) > 0$.

إذن :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

3) • تعيين النقط المشتركة بين (C) و (C') : $g(x) = Lnx$

ومنه : $x\,lnx - x + 1 = lnx$

وعليه : $(x - 1)\,lnx - (x - 1) = 0$ أي : $(x - 1)\,(lnx - 1) = 0$

ومنه إما $x - 1 = 0$ أو $lnx - 1 = 0$

وبالتالي : $x = 1$ أو $lnx = 1$ وعليه : $x = 1$ أو $x = e$.

لدينا : $g(1) = 0$ و $g(e) = 1$.

إذن : (C) و (C') تشتركان في النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و e .

• لدينا : $x\,lnx - x + 1 \leq lnx$

معناه : $(x - 1)\,lnx - (x - 1) \leq 0$ ومنه : $(x - 1)(lnx - 1) \leq 0$

x	0		1		e		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$lnx - 1$		$+$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(lnx-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه من أجل $x \in [1\,;\,e]$: $(x - 1)\,(lnx - 1) \leq 0$

أي : $x\,lnx - x + 1 \leq lnx$

II-1) دراسة تغيرات f : $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}\,lnx$

• النهايات :

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{1}{x - 1}\,lnx = +\infty$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{1}{x - 1}\,lnx = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{lnx}{x - 1}$$

ونضع $x - 1 = z$ فنجد :

$$\lim_{\substack{< \\ z \to 1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ z \to 1}} \frac{ln\,(1 + z)}{z} = 1$$

$$\lim_{\substack{> \\ z \to 1}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ z \to 1}} \frac{ln\,(1 + z)}{z} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x - 1}\,lnx = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x - 1} \times \frac{lnx}{x} = 0$$

• المشتق و إشارته :

لدينا : $f(x) = \dfrac{lnx}{x - 1}$

ومنه : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(x - 1) - lnx}{(x - 1)^2} = \dfrac{x - 1 - x\,lnx}{x\,(x - 1)^2}$

$$f'(x) = \frac{-\,(x\,lnx - x + 1)}{x(x - 1)^2} = \frac{-g(x)}{x\,(x - 1)^2}$$

ومنه $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$

لأن : $x\,(x - 1)^2 > 0$ في المجال $]0\,;\,+\infty[$

وعليه :

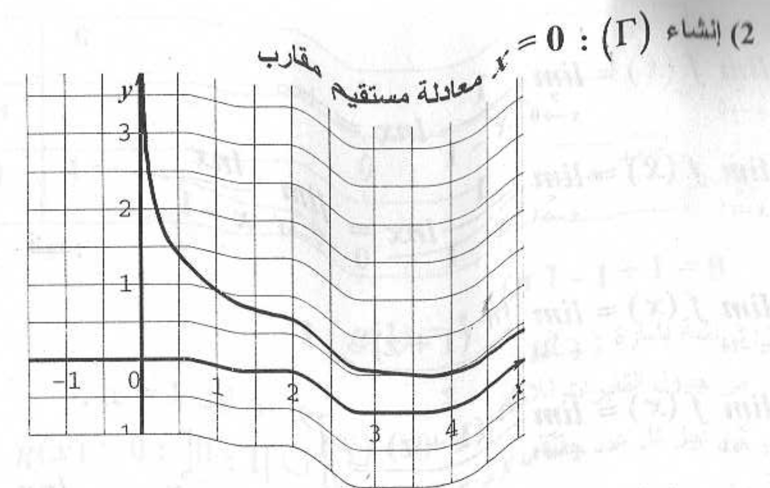
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	

ومنه f متناقصة تماما على كل من المجالين $]0\,;\,1[$ و $]1\,;\,+\infty[$

إذن جدول التغيرات هو :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1 $\|$ 1	$\searrow$	0

2) إنشاء (Γ) : $x = 0$ معادلة مستقيم مقارب



III- 1) تبيان أن المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلا :

في المجال $[3,5\ ;\ 3,6]$ الدالة f مستمرة و متناقصة تماما و لدينا :

$$f(3,5) = \frac{1}{2,5}\ ln3,5 = 0,501\ ...$$

$$f(3,6) = \frac{1}{2,6}\ ln3,6 = 0,492\ ...$$

ومنه : $f(3,6) < \frac{1}{2} < f(3,5)$

وبالتالي حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α حيث : $3,5 < \alpha < 3,6$ و يحقق : $f(\alpha) = \frac{1}{2}$.

2) • تبيان أن α حلا للمعادلة $h(x) = x$

لدينا : $f(\alpha) = \frac{1}{2}$ ومنه : $\frac{1}{\alpha - 1}\ ln\alpha = \frac{1}{2}$

وبالتالي : $2\ ln\alpha = \alpha - 1$ أي أن : $2\ ln\alpha\ - \alpha + 1 = 0$

وعليه : $ln\alpha - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} = 0$ ومنه : $ln\alpha - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} + \alpha = \alpha$

أي : $ln\alpha + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} = \alpha$ وبالتالي : $h(\alpha) = \alpha$

إذن α حلا للمعادلة $h(x) = x$.

• دراسة اتجاه تغير الدالة $h(x)$. $D_h =]1$

$$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{2 + x}{2x}$$

ومنه : $h'(x) > 0$ ومنه h متزايدة تماما .

• تبيان أن : $h(x) \in I$

لدينا : $3 \leq x \leq 4$ ومنه : $ln3 \leq lnx \leq ln4$

وكذلك : $\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}x \leq 2$

ومنه : $ln3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \leq lnx + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \leq ln4 + 2 + \frac{1}{2}$

إذن : $ln3 + 2 \leq h(x) \leq ln4 + \frac{5}{2}$

وعليه : $3,09 \leq h(x) \leq 3,89$

ومنه : $3 \leq h(x) \leq 4$ أي : $h(x) \in I$.

• تبيان أن : $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$

لدينا : $h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$ و $3 \leq x \leq 4$ ومنه : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$

وعليه : $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

أي : $\frac{3}{4} \leq h'(x) \leq \frac{5}{6}$ إذن : $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$.

3) a) نبرهن أن : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6}\ |U_n - \alpha|$

الدالة h تقبل الاشتقاق عند كل عدد من $]1\ ;\ +\infty[$ وعليه يمكن إجراء تقريب تآلفي للدالة h عند α .

ومنه : $h(x) - h(\alpha) \simeq h'(\alpha) \times (x - \alpha)$

وبالتالي : $h(U_n) - h(\alpha) \simeq h'(\alpha)\ (U_n - \alpha)$

إذن : $|U_{n+1} - \alpha| \simeq h'(\alpha) \times |U_n - \alpha|$

لدينا : $|h'(x)| < \frac{5}{6}$ من أجل : $x \in [3\ ;\ 4]$

وبما أن : $3,5 < \alpha < 3,6$ فإن : $|h'(\alpha)| < \frac{5}{6}$.

إذن : $|U_{n+1} - \alpha| \le \frac{5}{6}|U_n - \alpha|$

b) نبرهن أن : $|U_n - \alpha| \le \left(\frac{5}{6}\right)^n$

مما سبق : $|U_n - \alpha| \le \frac{5}{6}|U_{n-1} - \alpha|$

$$|U_{n-1} - \alpha| \le \frac{5}{6}|U_{n-2} - \alpha|$$

$$\vdots$$

$$|U_2 - \alpha| \le \frac{5}{6}|U_1 - \alpha|$$

$$|U_1 - \alpha| \le \frac{5}{6}|U_0 - \alpha|$$

و بالتالي :

$$|U_n - \alpha|\times|U_{n-1} - \alpha|\times...\times|U_2 - \alpha|\times|U_1 - \alpha| \le \left(\frac{5}{6}\right)^n |U_{n-1} - \alpha|\times|U_{n-2} - \alpha|\times...\times|U_0 - \alpha|$$

و منه : $|U_n - \alpha| \le \left(\frac{5}{6}\right)^n . |U_0 - \alpha|$

لدينا : $|U_0 - \alpha| = |3 - \alpha|$ وبما أن : $3,5 < \alpha < 3,6$

فإن : $|3 - \alpha| < 1$ ومنه : $|U_n - \alpha| \le \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

c) نبرهن أن (U_n) متقاربة نحو α :

لدينا : $|U_n - \alpha| \le \left(\frac{5}{6}\right)^n$ وعليه : $-\left(\frac{5}{6}\right)^n \le U_n - \alpha \le \left(\frac{5}{6}\right)^n$

ومنه : $\alpha - \left(\frac{5}{6}\right)^n \le U_n \le \alpha + \left(\frac{5}{6}\right)^n$

لدينا : $\lim_{n\to+\infty}\left[\alpha - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\alpha + \left(\frac{5}{6}\right)^n\right] = \alpha$

ومنه : $\lim_{n\to+\infty} U_n = \alpha$ إذن : (U_n) متقاربة نحو α .

4) إذا كانت U_p قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد α فإن : $|U_p - \alpha| \le 10^{-3}$

ولدينا : $|U_p - \alpha| \le \left(\frac{5}{6}\right)^p$ ومنه حتى يكون الحصر محقق يجب أن يكون :

$\ln\left(\frac{5}{6}\right)^p \le \ln 10^{-3}$ وعليه : $p \times \ln\left(\frac{5}{6}\right) \le \ln 10^{-3}$

ومنه : $p \ge \frac{-3\ln 10}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$ ومنه : $p \ge 37,9$ ومنه : $p \ge 38$

وبالتالي : U_{38} قيمة مقربة إلى 10^{-3} حيث : $U_{38} = 3,513 \times 10^{-3}$.

التمرين 13 : --

1- تبيان أن : $f'(x) = \frac{\ln x + x + 1}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{\left(1 . \ln x + x . \frac{1}{x}\right)(x+1) - x\ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x+1) - x\ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x\ln x + \ln x + x + 1 - x\ln x}{(x+1)^2}$$

إذن : $f'(x) = \frac{\ln x + x + 1}{(x+1)^2}$

2- a) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا :

لدينا g مستمرة في المجال $]0 ; +\infty[$

ولدينا : $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} (\ln x + x + 1) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x + x + 1 = +\infty$$

إذن : $\lim g(x) \times \lim g(x) < 0$

ولدينا : $g'(x) = \frac{1}{x} + 1$

ومنه : $g'(x) > 0$ وعليه g متزايدة تماما و بالتالي المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]0 ; +\infty[$.

b) تعيين إشارة $g(x)$:

مما سبق نجد :

x	0	β	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

من جدول التغيرات لدينا :

x	0	β	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

دراسة اتجاه تغير الدالة f: لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

ومنه f متزايدة تماما على المجال $[\beta ; +\infty[$

و f متناقصة تماما على المجال $]0 ; \beta]$.

c) تبيان أن : $f(\beta) = -\beta$

لدينا : $f(\beta) = \frac{\beta \ln\beta}{\beta + 1}$ و $g(\beta) = 0$

ومنه : $\ln\beta + \beta + 1 = 0$ وبالتالي : $\ln\beta = -(\beta + 1)$

إذن : $f(\beta) = \frac{-\beta(\beta + 1)}{\beta + 1}$ وعليه : $f(\beta) = -\beta$.

3- a) حساب $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x)$

لدينا : $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^{>}} \frac{x \ln x}{x + 1} = 0$

b) قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0 :

الدالة f غير معرفة عند 0 وعليه غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

c) قابلية الاشتقاق للدالة F عند 0 من اليمين :

$$\lim_{x \to 0^{>}} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^{>}} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \to 0^{>}} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^{>}} \frac{\ln x}{x + 1} = -\infty$$

إذن F غير قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين .

4- a) حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x + 1} \times \ln x$$

$$= +\infty$$

b) دراسة إشارة : $f(x) - \ln x$

$$f(x) - \ln x = \frac{x \ln x}{x + 1} - \ln x = \frac{x \ln x - (x + 1)\ln x}{x + 1}$$

إذن :

$$f(x) - \ln x = \frac{x \ln x - x \ln x - \ln x}{x + 1} = \frac{-\ln x}{x + 1}$$

لدينا : $x + 1 > 0$ ومنه $f(x) - \ln x$ له نفس إشارة : $-\ln x$

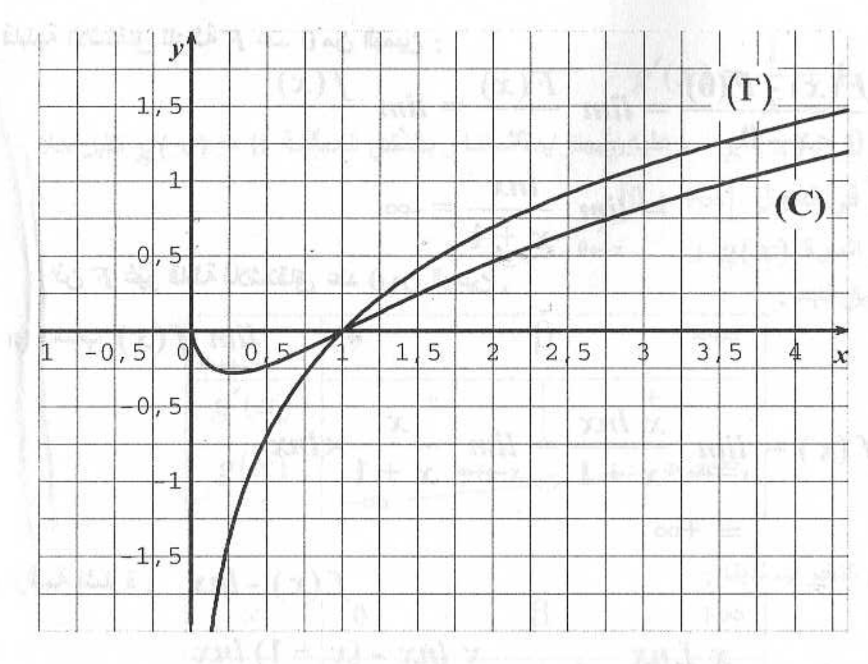
x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$	$+$	0	$-$
$f(x) - \ln x$	$+$	0	$-$

c) حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \ln x]$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\ln x}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{-x}{x + 1} = 0$$

5- إنشاء (Γ) و (C) :



التمرين 14 : --

I- 1) دراسة تغيرات الدالة f :

- مجموعة التعريف : $D =]0\ ;+\infty[$
- النهايات :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = 0$$

- المشتق و إشارته :

$$f'(x) = \frac{\frac{1 . x - 1(x+1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} - \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-(x+1)+x}{(x+1)^2}$$

إذن : $$f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

بما أن : $x > 0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0\ ;+\infty[$.

- جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

2) استنتاج إشارة $f(x)$

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن : $f(x) > 0$.

II-1) حساب $g'(x)$ واستنتاج تغيرات الدالة g :

$$g'(x) = 1 . ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{-1}{x(x+1)} \times x$$

$$g'(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{-1}{x+1}$$

وعليه : $g'(x) = f(x)$

ومنه $g'(x) > 0$ وبالتالي g متزايدة تماما على المجال $]0\ ;+\infty[$.

2) لدينا : $$(hok)(x) = h\left[k(x)\right] = h\left[\frac{1}{x}\right]$$

ومنه : $$(hok)(x) = \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = x\ ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

وعليه : $g(x) = (hok)(x)$ ومنه : $g = hok$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\ ln \frac{x+1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\ ln(x+1) - x\ lnx = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

و ذلك بوضع : $u=\frac{1}{x}$

• جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	0 ↗	1

III-1) حساب $Ln(U_n)$:

$$\ln(U_n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = g(n)$$

2) نبين أن (U_n) متزايدة تماما .

$$\ln(U_{n+1}) - \ln(U_n) = g(n+1) - g(n)$$

ولدينا : $g(n+1) > g(n)$ لأن الدالة g متزايدة تماما.

وعليه : $\ln(U_{n+1}) - \ln(U_n) > 0$

إذن : $\ln(U_{n+1}) > \ln(U_n)$ ومنه : $U_{n+1} > U_n$

لأن الدالة ln متزايدة تماما . إذن (U_n) متزايدة تماما.

3) نبين أن (U_n) متقاربة : $\lim_{n\to+\infty}\ln(U_n) = \lim_{n\to+\infty} g(n) = 1$

إذن : (U_n) متقاربة نحو e .

التمرين 15 : --

I-1) دراسة تغيرات الدالة g :

• $\lim_{x\to0^{>}} g(x) = \lim_{x\to0^{>}} (-8\ln x + x^2+4) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (-8\ln x + x^2+4) = \lim_{x\to+\infty} x.\left(\frac{-8\ln x}{x} + x + \frac{4}{x}\right) = +\infty$$

$$\bullet\ g'(x) = \frac{-8}{x} + 2x = \frac{-8+2x^2}{x} = \frac{2(x^2-4)}{x}$$

$g'(x) = 0$ معناه : $x = 2$

من أجل $x > 2$ الدالة g متزايدة تماما لأن $g'(x) > 0$.

من أجل $0 < x < 2$ الدالة g متناقصة تماما لأن $g'(x) < 0$.

• جدول التغيرات :

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$g(2)$	↗ $+\infty$

2) إشارة $g(x)$:

لدينا : $g(2) = -8\ln 2 + 8$ لكن : $\ln 2 < 1$

ومنه : $-8\ln 2 + 8 > 0$ إذن : $g(2) > 0$

وعليه حسب جدول التغيرات $g(x) > 0$.

II-1) تبيان أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

لدينا :

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2x(x^2+4)}{x^4} \times \ln x + \frac{x^2+4}{x^2} \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{-8}{x^3}\ln x + \frac{x^2+4}{x^3} = \frac{-8\ln x + x^2 + 4}{x^3}$$

و بالتالي : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

ب) دراسة تغيرات الدالة f :

$$\lim_{x\to0^{>}} f(x) = \lim_{x\to0^{>}} \frac{x^2+4}{x^2} \times \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4}{x^2} \times \ln x = +\infty$$

إشارة المشتق : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$

لدينا : $x^3>0$ و $g(x)>0$ ومنه : $f'(x)>0$

وبالتالي f متزايدة تماما على $]0\,;+\infty[$.

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

II- 1) دراسة إشارة : $h(x)$

$$h(x)=\frac{x^2+4}{x^2}\times lnx - lnx$$

و منه : $$h(x)=\frac{(x^2+4)\,lnx - x^2\,lnx}{x^2}=\frac{4\,lnx}{x^2}$$

$h(x)=0$ تكافئ $lnx=0$ ومنه $x=1$

$h(x)>0$ تكافئ $lnx>0$ ومنه $x>1$

$h(x)<0$ تكافئ $lnx<0$ ومنه $0<x<1$.

2) الوضعية النسبية للمنحنى (C) و (γ) :

في المجال $]1\,;+\infty[$: (C) يقع فوق (γ) .

في المجال $]0\,;1[$: (C) يقع تحت (γ).

(C) يقطع (γ) في النقطة A (1 ; 0) .

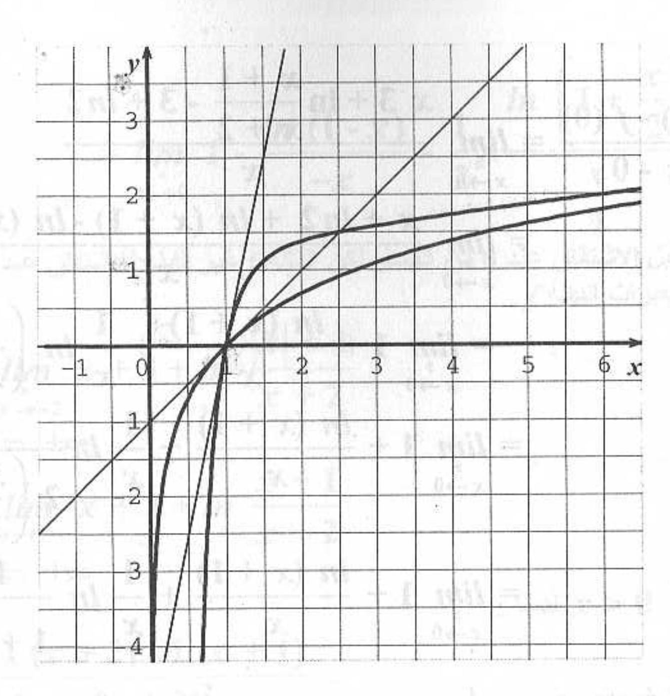
3) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 4\times\dfrac{lnx}{x^3}=0$

نستنتج أن (C) و (γ) متقاربان عندما يقترب x من $+\infty$

4) إنشاء (C) و (γ) :

معادلة المماس لـ (C) عند A (1 ; 0) هي : $y=5(x-1)$.

معادلة المماس لـ (γ) عند A (1 ; 0) هي : $y=(x-1)$.



التمرين 16 : --

1) مجموعة التعريف : $D_f=\{x\in\mathbb{R} : x+2>0\}$

إذن : $D_f=]-2\,;+\infty[$.

2) دراسة استمرارية f عند 0 :

لدينا : $f(0)=3-ln2$

ولدينا : $$\begin{cases} f(x)=x+3+ln\dfrac{x+1}{x+2} & ;\ x\ \geq\ 0 \\ f(x)=x+3+ln\dfrac{-x+1}{x+2} & ;\ x\ \leq\ 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\ x+3+ln\frac{x+1}{x+2}=3-ln2=f(0)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\ x+3+ln\frac{-x+1}{x+2}=3-ln2=f(0)$$

ومنه f مستمرة عند 0

قابلية الاشتقاق عند 0 :

$$\lim_{x \to 0^{>}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^{>}} \frac{x\ 3+\ln\frac{x+1}{x+2} - 3 + \ln 2}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^{>}} \frac{x + \ln 2 + \ln(x+1) - \ln(x+2)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^{>}} 1 + \frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{2}{x+2}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^{>}} 1 + \frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{1}{x}\ln\frac{2}{2\left(\frac{x}{2}+1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0^{>}} 1 + \frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{1}{x}\ln\frac{1}{1+\frac{x}{2}}$$

و منه :

$$\lim_{x \to 0^{>}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^{>}} 1 + \frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^{>}} 1 + \frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{1}{2} \times \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2}$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين .

$$\lim_{x \to 0^{<}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^{<}} \frac{x+3+\ln\frac{-x+1}{x+2} - 3 + \ln 2}{\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^{<}} \frac{x + \ln\left(\frac{-x+1}{x+2}\right) + \ln 2}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^{<}} \frac{x + n(1-x) - \ln(x+2) + \ln 2}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^{<}} 1 - \frac{\ln(1-x)}{-x} + \frac{1}{x}\ln\frac{2}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to 0^{<}} 1 - \frac{\ln(1-x)}{-x} - \frac{1}{2} \times \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \frac{-1}{2}$$

وعليه f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليسار لكن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

3) دراسة تغيرات الدالة f.

$$\lim_{x \to -2^{>}} f(x) = \lim_{x \to -2^{>}} x + 3 + \ln\frac{|x|+1}{x+2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + 3 + \ln\frac{x+1}{x+2} = +\infty$$

• من أجل $x > 0$ لدينا :

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{1(x+2) - 1(x+1)}{(x+2)^2}}{\frac{x+1}{x+2}} = 1 + \frac{1}{(x+2)^2} \times \frac{x+2}{x+1}$$

وعليه :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x+2)(x+1)}$$

وبالتالي لما $x > 0$ فإن : $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما على $]0 ; +\infty[$.

• من أجل $x < 0$:

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{-1(x+2) - 1(-x+1)}{(x+2)^2}}{\frac{-x+1}{x+2}} = 1 + \frac{-3}{(x+2)^2} \times \frac{x+2}{-x+1}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{(x+2)(-x+1)} = \frac{(x+2)(-x+1) - 3}{(x+2)(-x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + x - 2x + 2 - 3}{(x+2)(-x+1)}$$

إذن : $f'(x) = -\dfrac{x^2 + x + 1}{(x+2)^2\ (-x+1)}$

لدينا : $x^2 + x + 1 > 0$ و $-x + 1 > 0$ و $-x + 2 > 0$

ومنه $f'(x) < 0$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-2\ ;\ 0]$.

x	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\frac{1}{2}$ ‖ $\frac{3}{2}$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$3-ln2$	↗	$+\infty$

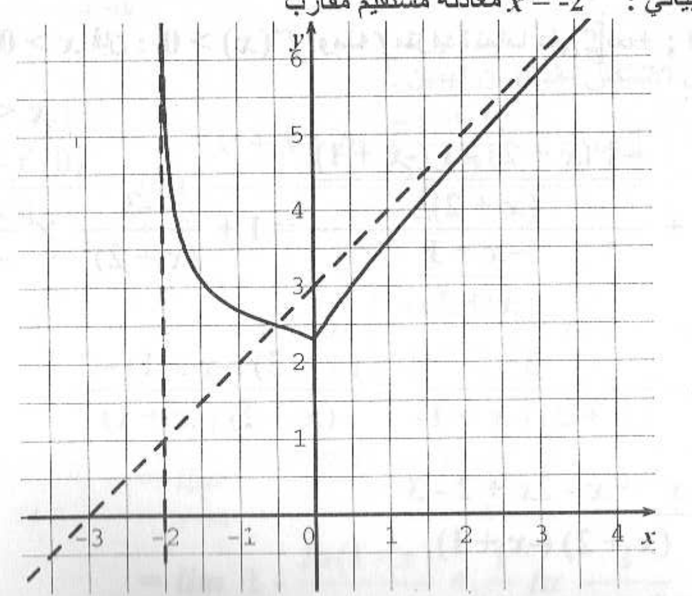
4) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x - 3$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + 3 + ln\,\frac{x+1}{x+2} - x - 3\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 0$$

نستنتج أن $y = x + 3$ معادلة مستقيم مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$.

5) التمثيل البياني : $x = -2$ معادلة مستقيم مقارب



التمرين 17 : --

حل المعادلات :

1) لدينا : $Log\,(x^2 - 1) = Logx$

تكون المعادلة معرفة من أجل : $x > 0$ و $x^2 - 1 > 0$

وعليه : $x > 0$ و $x \in]-\infty\ ;\ -1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ إذن : $D =]1\ ;\ +\infty[$.

المعادلة تكافئ : $x^2 - 1 = x$ أي : $x^2 - x - 1 = 0$.

لدينا : $\Delta = (-1)^2 - 4\,(-1)$ وعليه : $\Delta = 5$

إذن للمعادلة حلين : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (مرفوض)

إذن مجموعة الحلول : $S = \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2) لدينا : $Logx + Log\,(-x+5) = Log\ 4$

تكون المعادلة معرفة من أجل : $x > 0$ و $-x + 5 > 0$

أي $x > 0$ و $x < 5$ ومنه : $D =]0\ ;\ 5[$.

المعادلة تكافئ : $Logx\,(-x+5) = Log4$

أي أن : $x\,(-x+5) = 4$ ومنه : $-x^2 + 5x - 4 = 0$

لدينا : $\Delta = (5)^2 - 4\,(-4)\,(-1)$ ومنه : $\Delta = -11$

إذن ليس للمعادلة حلول .

3) لدينا : $Logx - Log(x-1) = 1$

تكون المعادلة معرفة من أجل : $x > 0$ و $x - 1 > 0$

إذن : $D =]1\ ;\ +\infty[$

المعادلة تكافئ : $Log\,\dfrac{x}{x-1} = Log10$ ومنه : $\dfrac{x}{x-1} = 10$

وبالتالي : $x = 10\,(x-1)$ وعليه : $9x = 10$ ومنه $x = \dfrac{10}{9}$

إذن مجموعة الحلول : $S = \left\{\dfrac{10}{9}\right\}$.

التمرين 18 : --

- دراسة تغيرات الدوال :

1) لدينا : $f(x) = Log|x|$ ومنه $f(x) = \dfrac{1}{\ldots} \times Ln|x|$

• $D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

• $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\ln 10} \times \ln|x| = +\infty$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{\ln 10} \times \ln|x| = -\infty$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{\ln 10} \times \ln|x| = -\infty$

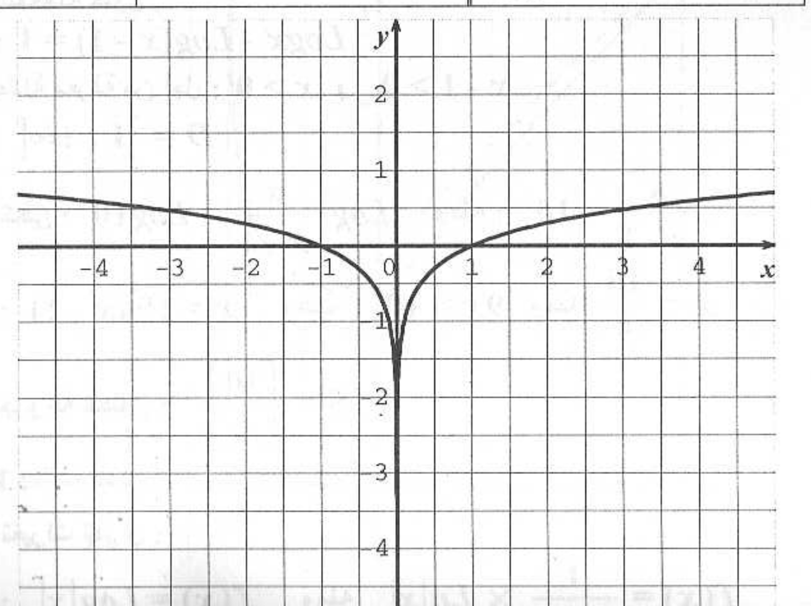
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln 10} \times \ln|x| = +\infty$

• $f'(x) = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x}$

لما $x > 0$: $f'(x) > 0$ وبالتالي f متزايدة تماما على المجال $]0 ; +\infty[$

لما $x < 0$: $f'(x) < 0$ وبالتالي f متناقصة تماما على المجال $]-\infty ; 0[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	‖	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$



2) لدينا : $g(x) = \frac{1 - Log x}{x}$ أي $g(x) = \frac{1 - \frac{1}{\ln 10} \times \ln x}{x}$

ومنه : $g(x) = \frac{\ln 10 - \ln x}{x \ln 10}$

• $D_g =]0 ; +\infty[$

• $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln 10 - \ln x}{x \ln 10} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x \ln 10}(\ln 10 - \ln x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 10 - \ln x}{x \ln 10}$

$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{\ln 10}\right] = 0$

• $g'(x) = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{\frac{-1}{x} . x - (\ln 10 - \ln x).1}{x^2}$

$= \frac{-1 - \ln 10 + \ln x}{x^2 \ln 10}$

$= \frac{\ln x - \ln 10 - 1}{x^2 \ln 10}$

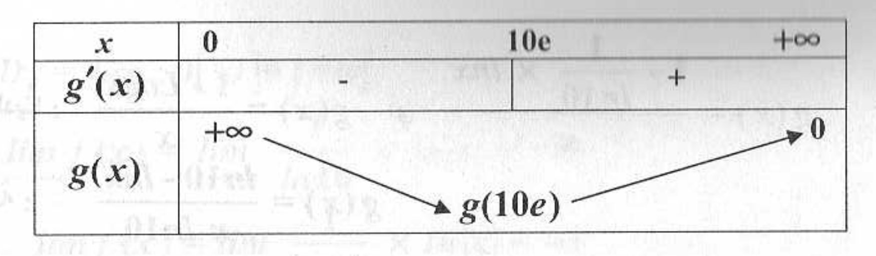
و منه : $g'(x) = \frac{\ln\left(\frac{x}{10}\right) - 1}{x^2 \ln 10}$

دراسة إشارة المشتق : $g'(x) = 0$ تكافئ : $\ln\left(\frac{x}{10}\right) - 1 = 0$

وعليه : $\ln\left(\frac{x}{10}\right) = 1$ و بالتالي : $\frac{x}{10} = e$ إذن : $x = 10e$

$g'(x) > 0$ تكافئ $\ln\left(\frac{x}{10}\right) - 1 > 0$ وعليه : $x > 10e$

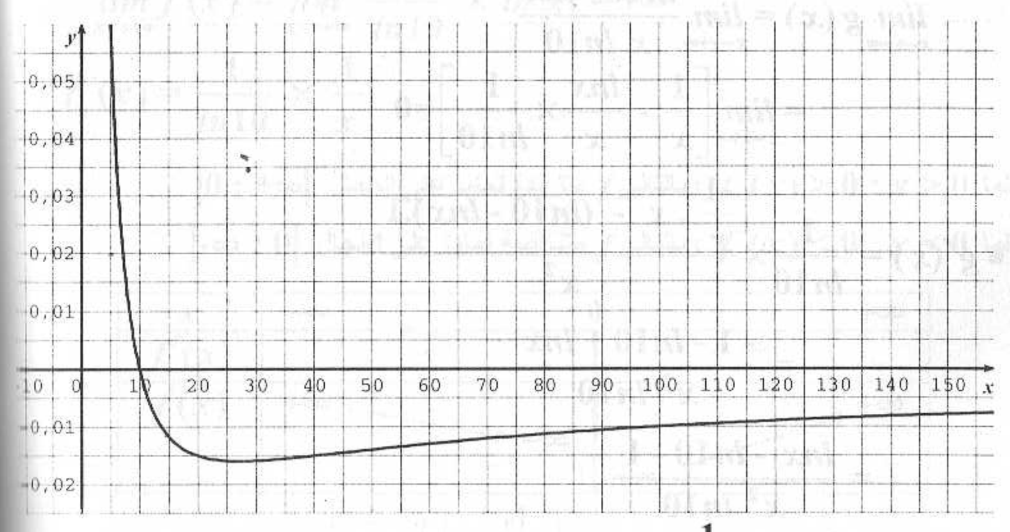
$g'(x) < 0$ تكافئ $x < 10e$.



x	0		$10e$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(10e)$	$\nearrow$	0

$$g(10e)=\frac{\ln 10-\ln 10e}{10e\ .\ln 10}=\frac{\ln 10-\ln 10-\ln e}{10e\ \ln 10}=\frac{-1}{10e\ \ln 10}$$

نمثل البيان في معلم غير متجانس لتوضيح الرسم لأن $g(10e)\simeq -0,015$



3) لدينا : $h(x)=\dfrac{Logx}{x}=\dfrac{\frac{1}{\ln 10}\times \ln x}{x}$.

ومنه : $h(x)=\dfrac{\ln x}{x\ \ln 10}$

• $D_h=]0\ ;+\infty[$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} h(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\ln x}{x\ \ln 10}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln 10}\times\frac{\ln x}{x}=0$$

• $h'(x)=\dfrac{1}{\ln 10}\times\dfrac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1}{\ln 10}\times\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

و منه : $h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2\ln 10}$

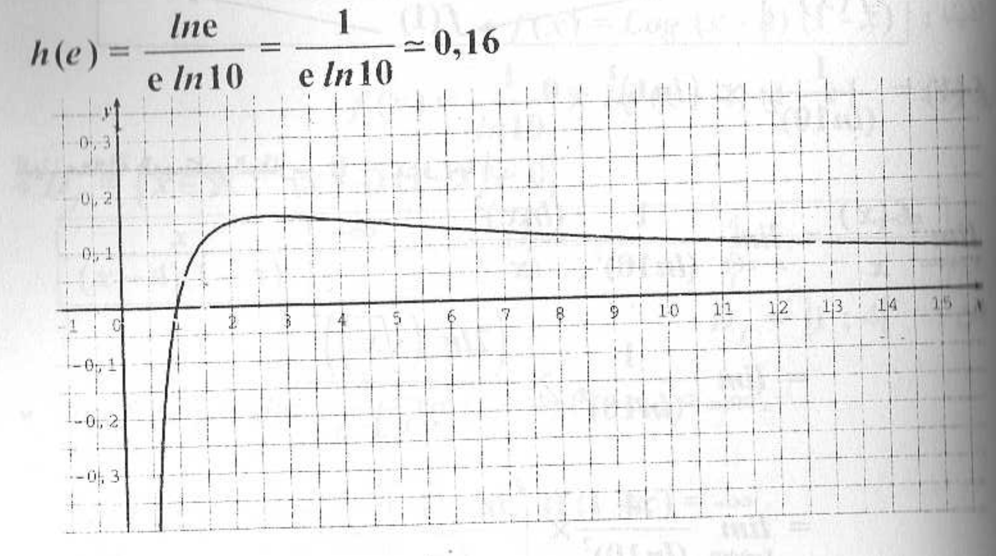
$h'(x)=0$ تكافئ : $1-\ln x=0$ ومنه $x=e$

$h'(x)>0$ تكافئ : $1-\ln x>0$ ومنه $x<e$

$h'(x)<0$ تكافئ : $1-\ln x<0$ ومنه $x>e$

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$h(e)$	$\searrow$	0

$$h(e)=\frac{\ln e}{e\ \ln 10}=\frac{1}{e\ \ln 10}\simeq 0,16$$



التمرين 19 : ----------------------------------

دراسة تغيرات الدالة f :

لدينا : $f(x)=\left(\dfrac{\ln x}{\ln 10}\right)^2$ أي : $f(x)=\dfrac{1}{(\ln 10)^2}\times(\ln x)^2$

• $D_f=]0\ ;+\infty[$

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{(lnx)^2}{(ln10)^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(lnx)^2}{(ln10)^2} = +\infty$

- $f'(x) = \dfrac{1}{(ln10)^2} \times 2 \times \dfrac{1}{x}\, lnx$

ومنه : $f'(x) = 0$ تكافئ $lnx = 0$ ومنه $x = 1$.

$f'(x) > 0$ تكافئ $lnx > 0$ ومنه $x > 1$.

إذن f متزايدة تماما على مجال $]1 \,;\, +\infty[$.

$f'(x) < 0$ تكافئ $0 < x < 1$ وعليه f متناقصة تماما على المجال $]0 \,;\, 1[$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(1)$	↗	$+\infty$

$f(1) = \dfrac{1}{(ln10)^2} \times (ln1)^2 = 0$

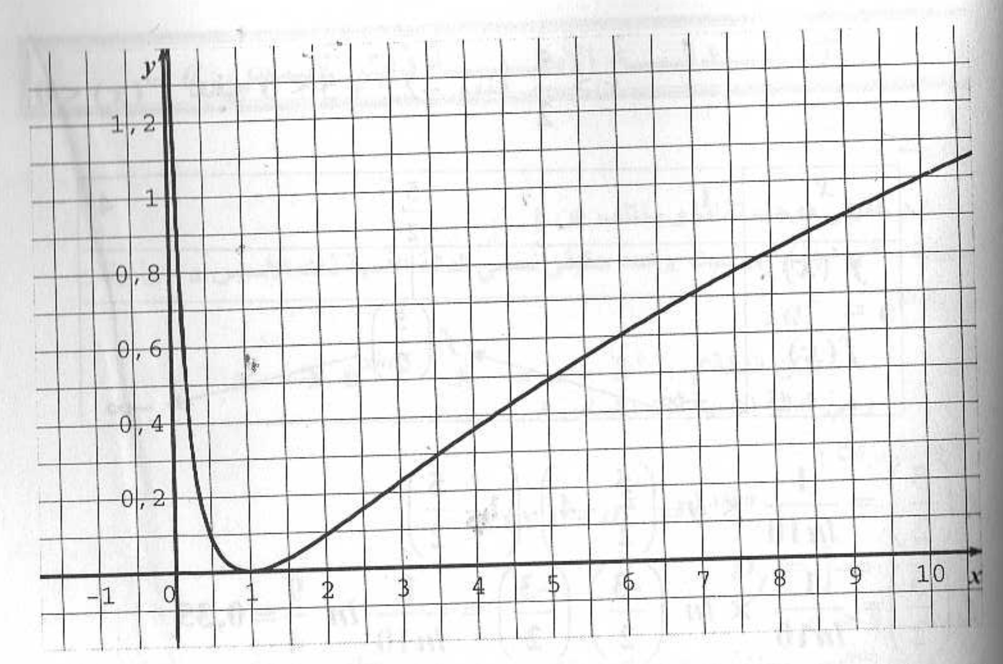
لدينا معادلة المستقيم المقارب $x = 0$ و بما أن

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(ln10)^2} \dfrac{(lnx)^2}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(ln10)^2} \times \dfrac{\left(2ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{(ln10)^2} \times \left(\dfrac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$

ومنه يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه محور الفواصل عند $+\infty$.



التمرين 20 :

لدينا : $f(x) = Log\,(x-4)(1-x)$

ومنه : $f(x) = \dfrac{1}{ln10} \times ln\,(x-4)(1-x)$

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \ (x-4)(1-x) > 0\}$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$(x-4)(1-x)$		-	0	+	0	-	

إذن : $D_f =]1 \,;\, 4[$.

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{1}{ln10}\, ln\,(x-4)(1-x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 4} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 4} \dfrac{1}{ln10}\, ln\,(x-4)(1-x) = -\infty$

- $f'(x) = \dfrac{1}{ln10} \times \dfrac{-2x+5}{(x-4)(1-x)}$

$f'(x) = 0$ تكافئ $-2x + 5 = 0$ ومنه $x = \dfrac{5}{2}$

$f'(x) > 0$ تكافئ $-2x + 5 > 0$ ومنه $x < \dfrac{5}{2}$

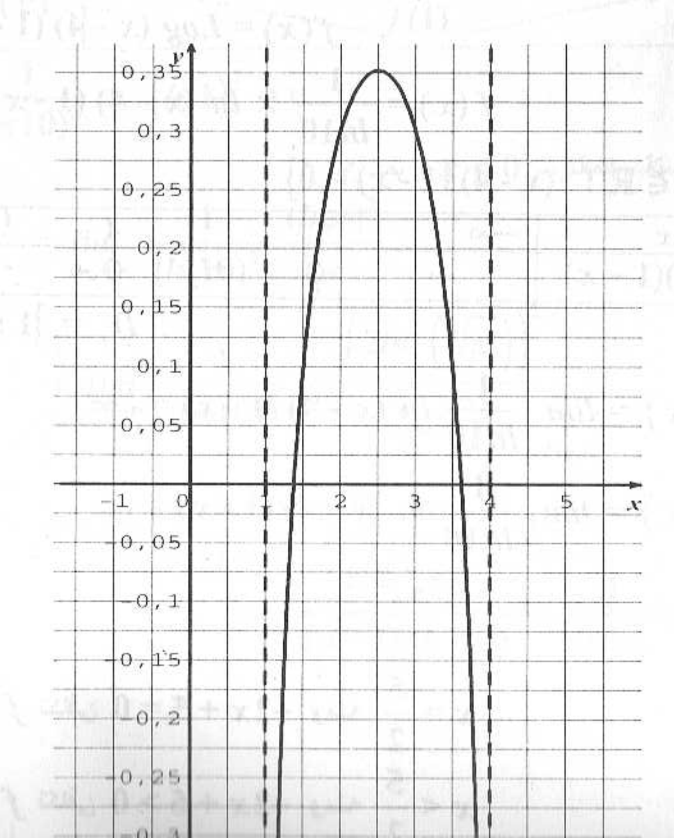
$f'(x) < 0$ تكافئ $-2x + 5 < 0$ ومنه $x > \frac{5}{2}$

x	1	$\frac{5}{2}$	4
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f\left(\frac{5}{2}\right)$	↘ $-\infty$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{\ln 10} \times \ln\left(\frac{5}{2} - 4\right)\left(1 - \frac{5}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{\ln 10} \times \ln\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{1}{\ln 10} \ln \frac{9}{4} \simeq 0,35$$

معادلات المستقيمات المقاربة $x = 1$, $x = 4$



7- الدالـــة الأسيـــة ذات الأساس a

تعريف :

A عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1 .

الدالة : $x \mapsto a^x$ حيث x عدد حقيقي تسمى الدالة الأسية ذات الأساس a ولدينا :

$a^x = e^{x\ln a}$.

مثال : لتكن الدالة f : $x \mapsto 3^x$ أو $x \mapsto e^{x\ln 3}$

وهي الدالة الأسية ذات الأساس 3 .

دراسة التغيرات :

$$f(x) = a^x = e^{x\ln a}$$

$$D_f =]-\infty ; +\infty[$$

من أجل $a > 1$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{x\ln a} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{x\ln a} = +\infty$$

$$f'(x) = (Lna) . e^{xLna}$$

وعليه $f'(x) > 0$ وبالتالي f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

من أجل $0 < a < 1$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{x\ln a} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{x\ln a} = 0$$

$$f'(x) = (Lna)\, e^{xLna}$$

وعليه $f'(x) < 0$ لأن : $\ln a < 0$ وبالتالي f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

خواص :

a و a' عددان حقيقيان مو جبان تماما و يختلف كل منهما عن 1 .

x و x' عددان حقيقيان :

1) $\ln a^x = x . \ln a$ 2) $a^{x+x'} = a^x . a^{x'}$

3) $a^{x-x'} = \dfrac{a^x}{a^{x'}}$ 4) $(a^x)^{x'} = a^{x.x'}$

5) $(a . a')^x = a^x . a'^x$ 6) $\left(\dfrac{a}{a'}\right)^x = \dfrac{a^x}{a'^x}$

حالة خاصة :

من أجل : $a = 10$ الدالة : $x \mapsto 10^x$

تسمى الدالة الأسية ذات الأساس 10.

التمارين

التمرين 1 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية :

1) $10^x = 5$; 2) $3^x = 5^{2x-5}$; 3) $5^{2x} - 7 . 5^x + 12 = 0$

4) $3^{x+2} + 9^{x-1} = 1458$

التمرين 2 :

حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ الجملة : $\begin{cases} 4^x = y^4 \\ 4^{x+1} = y^{4+x} \end{cases}$

التمرين 3 :

عين مشتقات الدوال الآتية :

1) $f : x \mapsto 10^{2x-3}$ 2) $f : x \mapsto 4^{x^2-4x}$

3) $f : x \mapsto \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x^2-5}$ 4) $f : x \mapsto (x^2 - 4)\, 2^x$

التمرين 4 :

أدرس تغيرات الدوال الآتية ثم مثلها بيانيا.

1) $f : x \mapsto 2^{x^2+x+1}$ 2) $g : x \mapsto (0 , 4)^{x-1}$

3) $h : x \mapsto x^x$

التمرين 5 :

أدرس تغيرات الدالتين كل من الدالتين f و g المعرفتين فيما يلي ثم مثلهما بيانيا.

$f : x \mapsto -2 . 4^x + 2$; $g : x \mapsto 2 . 4^x + 1$

عين نقط تقاطع (C_f) و (C_g) .

التمرين 6 :

f و g دالتان معرفتان كما يلي :

$f(x) = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{2}$; $g(x) = \dfrac{10^x + 10^{-x}}{2}$

1- عين مجموعة تعريف كل منهما .

2- احسب : $[g(x)]^2 - [f(x)]^2$

3- ادرس تغيرات الدالة f .

4- احسب : $f(1), f(0), f(-1), f(-2), f(2)$

التمرين 7 :

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x) = |x|^{\frac{1}{x-1}}$

1- ادرس استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها.

2- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات التعريف .

3- نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي :

$\begin{cases} g(x) = f(x) \quad ; \quad x \neq 1 \\ g(1) = e \end{cases}$

- ادرس استمرارية الدالة g عند 1.
- أنشئ التمثيل البياني (C_g) للدالة g في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ باستعمال الآلة البيانية .

التمرين 8 :

ادرس تغيرات الدالة f ذات المتغير الحقيقي x حيث : $f(x)=2^x+2^{-x}$

ثم أنشئ تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

التمرين 9 :

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x)=\dfrac{10^x}{10^x-1}$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f.

2) احسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف

3) احسب $f'(x)$ وأدرس إشارته.

4- أنشئ (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

التمرين 10 :

1) ادرس تغيرات الدالة g حيث: $g(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$ و استنتج إشارتها .

2) f دالة عددية لمتغير حقيقي موجب تماما x معرفة كما يلي : $f(x)=x^{x-1}$

- ادرس تغيرات الدالة f .

ثم استنتج تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الحلــــــول

التمرين 1 :

حل المعادلات :

1) لدينا : $10^x=5$ وهي تكافئ : $\ln 10^x=\ln 5$

ومنه $x\ln 10=\ln 5$ وبالتالي : $x=\dfrac{\ln 5}{\ln 10}$

مجموعة الحلول : $S=\left\{\dfrac{\ln 5}{\ln 10}\right\}$.

2) لدينا : $3^x=5^{2x-5}$ وهي تكافئ : $\ln 3^x=\ln 5^{2x-5}$

وعليه : $x\ln 3=(2x-5)\ln 5$ وعليه : $x\ln 3=2x\ln 5-5\ln 5$

وعليه : $x\ln 3-2x\ln 5=-5\ln 5$

إذن : $x(\ln 3-2\ln 5)=-5\ln 5$ أي $x=\dfrac{-5\ln 5}{\ln 3-\ln 5^2}$

ومنه : $x=\dfrac{-5\ln 5}{\ln\left(\dfrac{3}{25}\right)}$

3) لدينا : $5^{2x}-7.5^x+12=0$

بوضع $5^x=y$ نجد : $y^2-7y+12=0$ و منه : $\Delta=1$

إذن للمعادلة حلين $y_1=3$ و $y_2=4$

لما $y=3$: $5^x=3$ وعليه $\ln 5^x=\ln 3$

إذن : $x\ln 5=\ln 3$ ومنه : $x=\dfrac{\ln 3}{\ln 5}$

لما $y=4$: $5^x=4$ وعليه : $\ln 5^x=\ln 4$

ومنه : $x\ln 5=\ln 4$ وبالتالي : $x=\dfrac{\ln 4}{\ln 5}$

مجموعة الحلول : $S=\left\{\dfrac{\ln 3}{\ln 5};\dfrac{\ln 4}{\ln 5}\right\}$.

4) لدينا : $3^{x+2}+9^{x-1}=1458$ و منه : $9.3^x+(3^2)^x.(3^2)^{-1}=1458$

أي : $9.3^x+3^{-2}.(3^2)^x-1458=0$

- ادرس استمرارية الدالة g عند 1.
- أنشئ التمثيل البياني (C_g) للدالة g في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ باستعمال الآلة البيانية .

التمرين 8 :

ادرس تغيرات الدالة f ذات المتغير الحقيقي x حيث : $f(x)=2^{x}+2^{-x}$

ثم أنشئ تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

التمرين 9 :

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x)=\frac{10^{x}}{10^{x}-1}$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f.

2) احسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف

3) احسب $f'(x)$ وأدرس إشارته.

4- أنشئ (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

التمرين 10 :

1) ادرس تغيرات الدالة g حيث: $g(x)=lnx+1-\frac{1}{x}$ و استنتج إشارتها .

2) f دالة عددية لمتغير حقيقي موجب تماما x معرفة كما يلي : $f(x)=x^{x-1}$

- ادرس تغيرات الدالة f .

ثم استنتج تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الحلول

التمرين 1 :

حل المعادلات :

1) لدينا : $10^{x}=5$ وهي تكافئ : $ln10^{x}=ln5$

ومنه $xln10=ln5$ وبالتالي : $x=\frac{ln5}{ln10}$

مجموعة الحلول : $S=\left\{\frac{ln\,5}{ln\,10}\right\}$.

2) لدينا : $3^{x}=5^{2x-5}$ وهي تكافئ : $ln3^{x}=ln5^{2x-5}$

وعليه : $xln3=(2x-5)\,ln5$ وعليه : $xln3=2x\,ln5-5\,ln5$

وعليه : $xln3-2x\,ln5=-5\,ln5$

اذن : $x\,(ln3-2ln5)=-5\,ln5$ أي $x=\frac{-5ln5}{ln3-ln5^{2}}$

ومنه : $x=\frac{-5ln5}{ln\left(\frac{3}{25}\right)}$

3) لدينا : $5^{2x}-7\,.\,5^{x}+12=0$

بوضع $5^{x}=y$ نجد : $y^{2}-7y+12=0$ و منه : $\Delta=1$

إذن للمعادلة حلين $y_1=3$ و $y_2=4$

لما $y=3$: $5^{x}=3$ وعليه $ln5^{x}=ln3$

إذن : $xln5=ln3$ ومنه : $x=\frac{ln3}{ln5}$

لما $y=4$: $5^{x}=4$ وعليه : $ln5^{x}=ln4$

ومنه : $xln5=ln4$ وبالتالي : $x=\frac{ln4}{ln5}$

مجموعة الحلول : $S=\left\{\frac{ln3}{ln5};\frac{ln4}{ln5}\right\}$.

4) لدينا : $3^{x+2}+9^{x-1}=1458$ و منه : $9.\,3^{x}+(3^{2})^{x}.(3^{2})^{-1}=1458$

أي : $9\,.\,3^{x}+3^{-2}\,.\,(3^{2})^{x}-1458=0$

و منه : $\frac{1}{9} . 3^{2x} + 9 . 3^x - 1458 = 0$

و بالتالي : $3^{2x} + 81 . 3^x - 13122 = 0$

بوضع $3^x = y$ نجد : $y^2 + 81y - 13122 = 0$

لدينا : $\Delta = 59049$ ومنه للمعادلة حلين :

$y_1 = \frac{-81 + 243}{2} = 81$ ؛ $y_2 = \frac{-81 - 243}{2} = -162$ (مرفوض)

وعليه : $3^x = 81$ وبالتالي : $ln3^x = ln81$

ومنه : $x\ ln3 = ln3^4$ أي : $x = \frac{4ln3}{ln3}$ وعليه : $x = 4$

مجموعة الحلول : $S = \{4\}$.

التمرين 2 : -----------------------------------

حل الجملة : $\begin{cases} 4^x = y^4 \\ 4^{x+1} = y^{4+x} \end{cases}$ وهي تكافئ : $\begin{cases} ln4^x = lny^4 \\ ln4^{x+1} = lny^{4+x} \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} x\ ln4 = 4Lny \\ (x+1)\ ln4 = (4+x)\ lny \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} lny = \frac{x\ ln4}{4} \\ (x+1)\ ln4 = (x+4) \times \frac{x\ ln4}{4} \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} lny = \frac{x\ ln4}{4} \\ 4\ (x+1) = x.\ (x+4) \end{cases}$

وبالتالي : $\begin{cases} lny = \frac{x\ ln4}{4} \\ x^2 = 4 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = 2 \text{ أو } x = -2 \\ lny = \frac{x\ ln4}{4} \end{cases}$

لما $x = 2$: $y = \frac{1}{2}\ ln4$ أي : $y = ln2$

لما $x = -2$: $y = \frac{-1}{2}\ ln4$ أي $y = -ln2$

مجموعة الحلول : $S = \{(2, ln2) ; (-2, -ln2)\}$

التمرين 3 : -----------------------------------

تعيين المشتقات :

1) لدينا : $f(x) = 10^{2x-3} = e^{(2x-3)ln10}$ و منه :

$$f'(x) = (2Ln10)\ e^{(2x-3)ln10} = (2\ Ln10)10^{2x-3}$$

2) لدينا : $f(x) = 4^{x^2-4x}$ أي : $f(x) = e^{(x^2-4x)ln4}$

وعليه : $f'(x) = (2x - 4)\ ln4 \times e^{(x^2-4x)ln4}$

إذن : $f'(x) = 4\ (x - 2)\ ln2 \times 4^{x^2-4x}$

3) لدينا : $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x^2-5}$

أي : $f(x) = e^{\left(\frac{1}{2}x^2-5\right)ln\frac{1}{2}} = e^{-\left(\frac{1}{2}x^2-5\right)ln2}$

و منه : $f'(x) = -(x\ ln2)\ e^{-\left(\frac{1}{2}x^2-5\right)ln2}$

وعليه : $f'(x) = -(x\ ln2)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x^2-5}$

4) لدينا : $f(x) = (x^2 - 4)2^x$ أي : $f(x) = (x^2 - 4)e^{xln2}$

و منه : $f'(x) = 2x\ .\ e^{xln2} + (x^2 - 4)\ ln2 \times e^{xln2}$

$$= e^{xln2}\left[2x + (x^2 - 4)\ ln2\right]$$

إذن : $.\ f'(x) = \left[(x^2 - 4)\ ln2 + 2x\right] \times 2^x$

التمرين 4 : -----------------------------------

1) لدينا : $f(x) = 2^{x^2+x+1}$ ومنه : $f(x) = e^{(x^2+x+1)ln2}$

- $D_f = \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{(x^2+x+1)ln2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{(x^2+x+1)ln2} = +\infty$
- $f'(x) = (2x+1)ln2\ .\ e^{(x^2+x+1)ln2}$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$

ومتناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{-1}{2}\right]$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f\left(\frac{-1}{2}\right)$	↗ $+\infty$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right)=2^{\frac{3}{4}}$$

دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة :

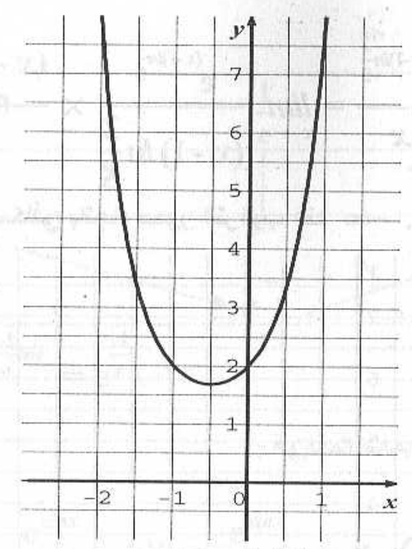
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{(x^2+x+1)ln2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{(x^2+x+1)ln2}}{(x^2+x+1)ln2}\times\frac{(x^2+x+1)ln2}{x}=+\infty$$

وعليه يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب عند $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{(x^2+x+1)ln2}}{(x^2+x+1)ln2}\times\frac{(x^2+x+1)ln2}{x}=-\infty$$

وعليه يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب عند $-\infty$



2) $g(x)=(0,4)^{x-1}$ أي $g(x)=\left(\frac{4}{10}\right)^{x-1}$

وعليه : $g(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}$ وعليه : $g(x)=e^{(x-1)ln\frac{2}{5}}$

- $D=\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{(x-1)ln\frac{2}{5}}=+\infty$

  $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{(x-1)ln\frac{2}{5}}=0$
- $g'(x)=\ln\frac{2}{5}\times e^{(x-1)ln\frac{2}{3}}$

وعليه : $g'(x)<0$ ومنه g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

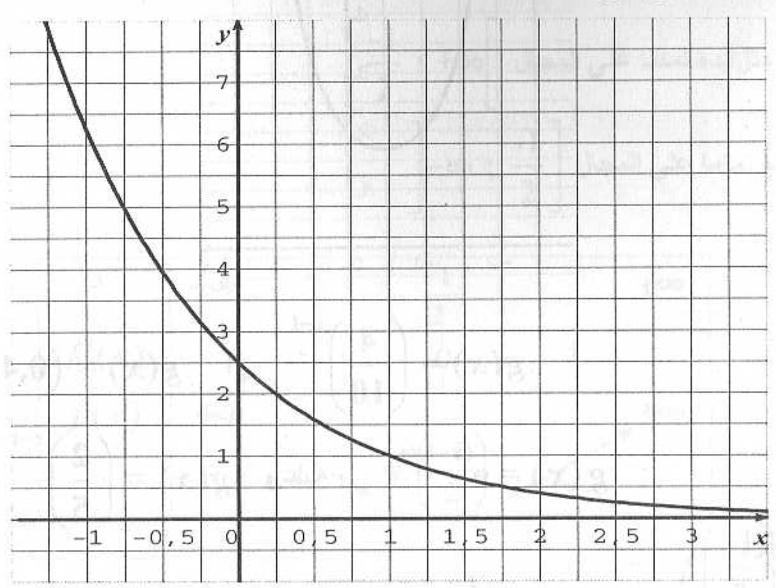
x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0

الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة :

لدينا $y=0$ معادلة مستقيم مقارب عند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{(x-1)\ln\frac{2}{5}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{(x-1)\ln\frac{2}{5}}}{(x-1)\ln\frac{2}{5}}\times\frac{(x-1)\ln\frac{2}{5}}{x}=-\infty$$

وعليه البيان يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب عند $-\infty$.



3) لدينا : $h(x)=x^x$ أي : $h(x)=e^{x\ln x}$

- $D=\left]0\,;+\infty\right[$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} h(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{x\ln x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln x}=+\infty$

- $h'(x)=\left(1\,.\ln x+x\,.\,\frac{1}{x}\right)e^{x\ln x}$

إذن : $h'(x)=\left(1+\ln x\right)e^{x\ln x}$

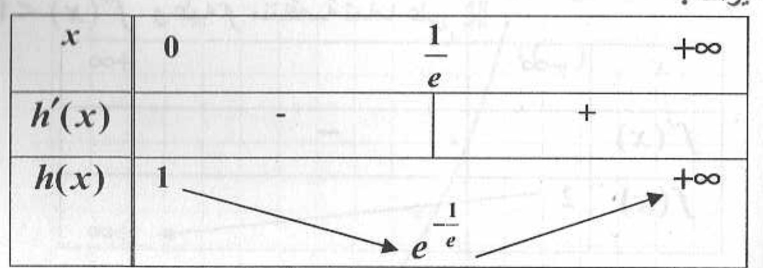
$h'(x)=0$ تكافئ : $1+\ln x=0$ ومنه : $\ln x=-1$ وعليه : $x=\frac{1}{e}$

$h'(x)>0$ تكافئ : $1+\ln x>0$ ومنه : $\ln x>-1$

وبالتالي : $x>\frac{1}{e}$



جدول التغيرات :



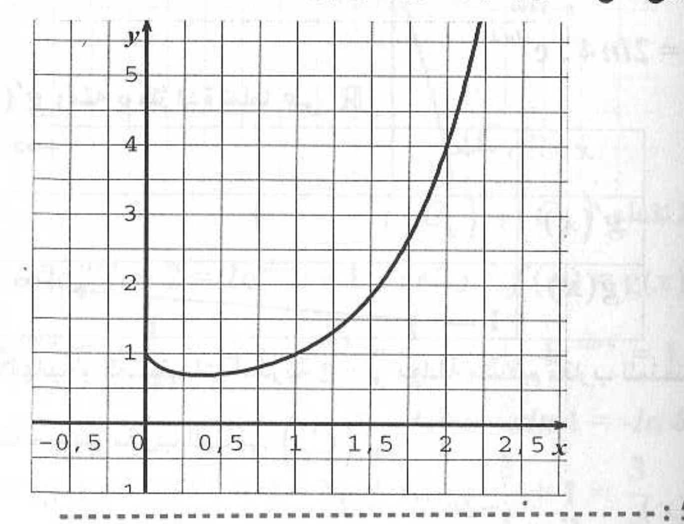
x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$h'(x)$		-		+	
$h(x)$	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$h\left(\frac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}}=e^{\frac{-1}{e}\ln e}=e^{\frac{-1}{e}}$$

الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln x}}{x\ln x}\times \ln x=+\infty$$

إذن يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب.



التمرين 5 : ....

دراسة تغيرات f : $f(x)=-2\,.\,4^x+2$

وعليه : $f(x)=-2\,e^{x\ln 4}+2$

- $D_f=\left]-\infty\,;+\infty\right[$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-2e^{x\ln 4}+2\right]=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-2e^{x\ln 4}+2\right]=-\infty$

- $f'(x) = -2Ln4 \,.\, e^{xLn4}$

ومنه : $f'(x) < 0$ وعليه f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	2 ↘ $+\infty$

دراسة تغيرات g حيث: $g(x) = 2 \,.\, 4^x + 1$

وعليه : $g(x) = 2 \,.\, e^{x\ln 4} + 1$

- $D_f =]-\infty ; +\infty[$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{xln4} + 1 = 1$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{xln4} + 1 = +\infty$
- $g'(x) = 2ln4 \,.\, e^{xln4}$

وعليه $g'(x) > 0$ ومنه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	1 ↗ $+\infty$

دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة $y = 2$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

. $y = 1$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_g) .

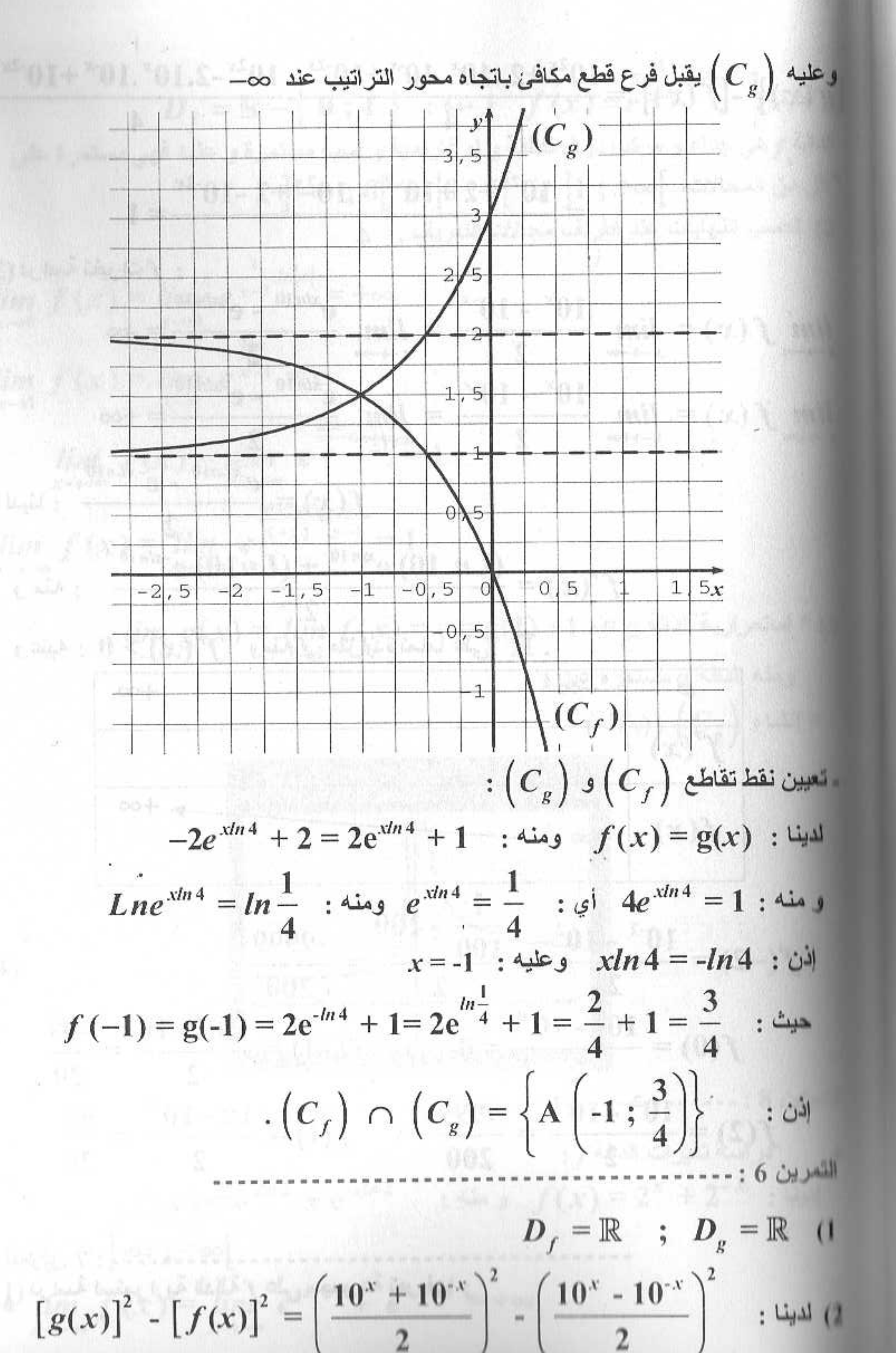
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2e^{xln4} + 2}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2e^{xln4}}{xln4} \times ln4 + \frac{2}{x} = -\infty$$

وعليه (C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب عند $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{xln4}}{xln4} \times ln4 + \frac{1}{x} = +\infty$$

وعليه (C_g) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب عند $-\infty$



تعيين نقط تقاطع (C_f) و (C_g) :

لدينا : $f(x) = g(x)$ ومنه : $-2e^{xln4} + 2 = 2e^{xln4} + 1$

و منه : $4e^{xln4} = 1$ أي : $e^{xln4} = \frac{1}{4}$ ومنه : $Lne^{xln4} = ln\frac{1}{4}$

إذن : $xln4 = -ln4$ وعليه : $x = -1$

حيث : $f(-1) = g(-1) = 2e^{-ln4} + 1 = 2e^{ln\frac{1}{4}} + 1 = \frac{2}{4} + 1 = \frac{3}{4}$

إذن : $(C_f) \cap (C_g) = \left\{A\left(-1 ; \frac{3}{4}\right)\right\}$.

التمرين 6 : --

1) $D_f = \mathbb{R}$; $D_g = \mathbb{R}$

2) لدينا : $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = \left(\frac{10^x + 10^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{10^x - 10^{-x}}{2}\right)^2$

$$[g(x)]^2-[f(x)]^2=\frac{10^{2x}+2.10^{x}.10^{-x}+10^{-2x}}{4}-\frac{10^{2x}-2.10^{x}.10^{-x}+10^{-2x}}{4}$$

$$=\frac{10^{2x}+2+10^{-2x}-10^{2x}+2-10^{-2x}}{4}=1$$

3) دراسة تغيرات f :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{10^{x}-10^{-x}}{2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{xln10}-e^{-xln10}}{2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{10^{x}-10^{-x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{xln10}-e^{-xln10}}{2}=+\infty$$

لدينا : $f(x)=\frac{e^{xLn10}-e^{-xLn10}}{2}$

و منه : $f'(x)=\frac{(Ln\,10)\,e^{xln10}+(Ln10)\,e^{-xln10}}{2}$

وعليه : $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

4)

$$f(-2)=\frac{10^{-2}-10^{2}}{2}=\frac{\frac{1}{100}-100}{2}=\frac{-9999}{200}$$

$$f(-1)=\frac{10^{-1}-10}{2}=\frac{-99}{20} \quad ؛ \quad f(0)=\frac{10^{0}-10^{-0}}{2}=0$$

$$f(1)=\frac{10-10^{-1}}{2}=\frac{99}{20} \quad ؛ \quad f(2)=\frac{10^{2}-10^{-2}}{2}=\frac{9999}{200}$$

التمرين 7 : --

1) دراسة استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها :

لدينا : $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}.ln|x|}$ و منه : $D_f=\mathbb{R}-\{0\,;1\}$

الدالة f هي جداء و مركب دوال ناطقة و لوغارتمية و أسية مستمرة و عليه فهي مستمرة على كل من المجالات $]1\,;+\infty[$ و $]0\,;1[$ و $]-\infty\,;0[$.

2) احسب النهايات عند أطراف مجالات التعريف .

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0} e^{\frac{1}{x-1}.ln|x|}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1} e^{\frac{lnx}{x-1}}=e$$

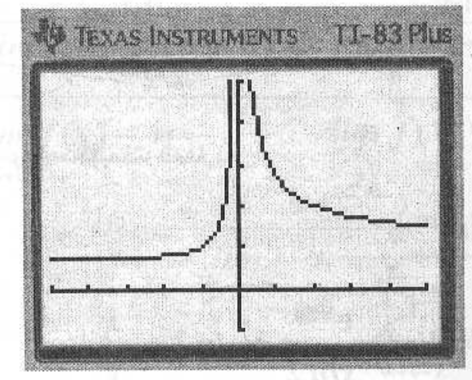
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{lnx}{x}\times\frac{x}{x-1}}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{ln(-x)}{(-x)}\times\frac{-x}{x-1}}=1$$

3) * استمرارية الدالة g عند 1 : $\lim_{x\to1} g(x)=\lim_{x\to1} f(x)=e=g(1)$

ومنه الدالة g مستمرة عند 1 .

* إنشاء (C_g) . (بالآلة)



التمرين 8 : --

* دراسة تغيرات الدالة f:

لدينا : $f(x)=2^{x}+2^{-x}$ و منه : $f(x)=e^{xln2}+e^{-xln2}$.

• $D_f=]-\infty\,;+\infty[$

• $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{xln2}+e^{-xln2}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln 2} + e^{-x\ln 2} = +\infty$$

• $f'(x) = Ln2 \, . \, e^{x\ln 2} - Ln2 \, . \, e^{-x\ln 2}$

إذن : $f'(x) = \ln 2 \left(e^{x\ln 2} - e^{-x\ln 2}\right)$.

لدينا : $f'(x) = 0$ تكافئ : $e^{x\ln 2} - e^{-x\ln 2} = 0$

وعليه : $e^{x\ln 2} = e^{-x\ln 2}$ ومنه : $x\ln 2 = -x\ln 2$

إذن : $2x\ln 2 = 0$ وبالتالي : $x = 0$.

لدينا : $f'(x) > 0$ تكافئ : $e^{xLn2} > e^{-xLn2}$

ومنه : $x\ln 2 > -x\ln 2$ وعليه : $2xLn2 > 0$

إذن : $x > 0$ ومنه f متزايدة تماما .

و منه : $f'(x) < 0$ تكافئ $x < 0$ ومنه f متناقصة تماما .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

• دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\ln 2} + e^{-x\ln 2}}{x}$$

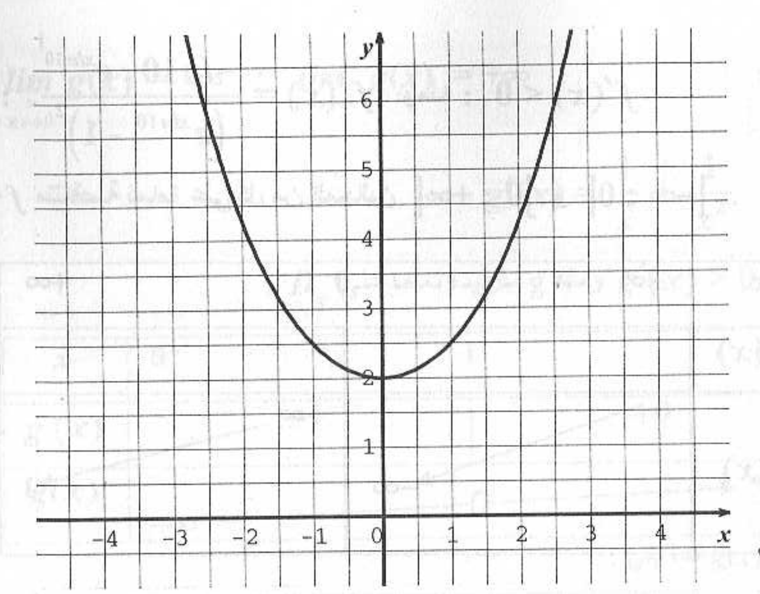
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\ln 2}}{x\ln 2} \times \ln 2 + \frac{1}{x} \, . \, e^{-x\ln 2} = +\infty$$

إذن يوجد فرع مكافئ باتجاه محور التراتيب عند $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \, . \, e^{x\ln 2} - \frac{e^{-x\ln 2}}{-x\ln 2} \times \ln 2 = -\infty$$

إذن يوجد فرع قطع باتجاه محور التراتيب عند $-\infty$.

رسم المنحنى :



التمرين 9 : --

1) مجموعة التعريف : $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : 10^x - 1 \neq 0\right\}$

$10^x - 1 = 0$ تكافئ $10^x = 1$ وعليه : $x = 0$

إذن : $D_f =]-\infty \, ; 0[\cup]0 \, ; +\infty[$.

2) لدينا : $f(x) = \dfrac{e^{x\ln 10}}{e^{x\ln 10} - 1}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x\ln 10}}{e^{x\ln 10} - 1} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\ln 10}}{e^{x\ln 10} - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\ln 10}}{e^{x\ln 10}\left(1 - \dfrac{1}{e^{x\ln 10}}\right)}$$

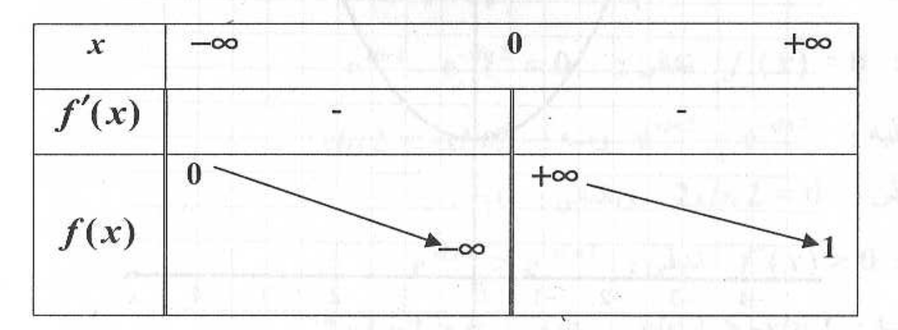
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 - e^{-x\ln 10}} = 1$$

3) حساب $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(\ln 10)\, e^{x\ln 10} . (e^{x\ln 10} - 1) - e^{x\ln 10} . (\ln 10) . e^{x\ln 10}}{\left(e^{x\ln 10} - 1\right)^2}$$

إذن : $f'(x) = \frac{-ln10 \, . \, e^{xln10}}{\left(e^{xln10} - 1\right)^2}$ ومنه : $f'(x) < 0$

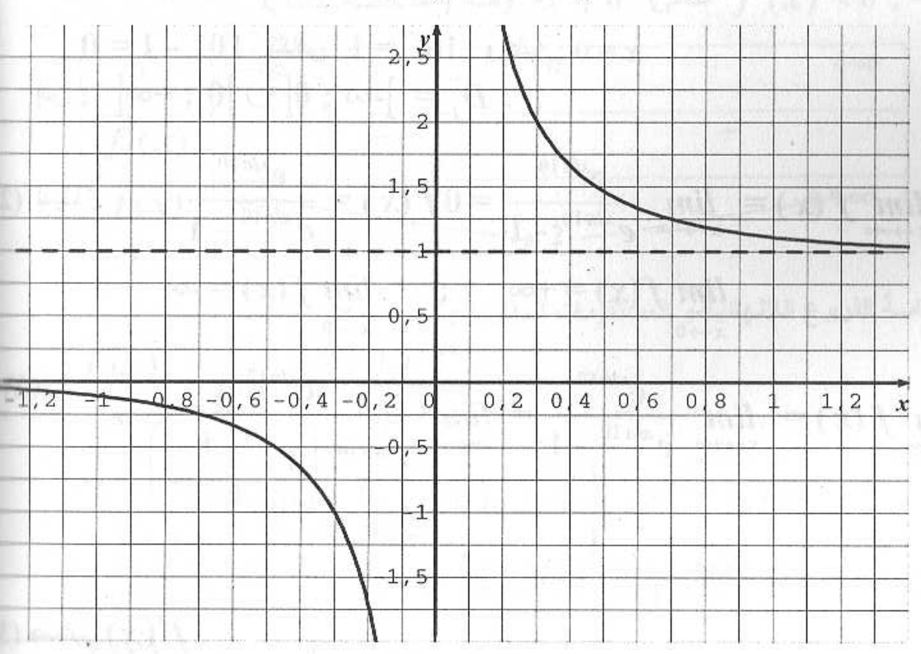
وعليه f متناقصة تماما على كل من المجالين $]0 \, ; +\infty[$ و $]-\infty \, ; 0[$.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖	-	
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$		‖	$+\infty$ ↘ 1	

4) إنشاء (C) :

لدينا : $x = 0$; $y = 0$; $y = 1$ معادلات المستقيات المقاربة.



التمرين 10 : ---

1) دراسة تغيرات الدالة g حيث : $g(x) = lnx + 1 - \frac{1}{x}$

* مجموعة التعريف : $D_g =]0 \, ; +\infty[$.

* النهايات : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

* المشتق : $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

وعليه : $g'(x) > 0$ ومنه g متزايدة تماما على D_g .

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+		+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

وعليه إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

2) دراسة تغيرات الدالة f حيث : $f(x) = x^{x-1}$ أي : $f(x) = e^{(x-1)lnx}$

* مجموعة التعريف : $D_f =]0 \, ; +\infty[$.

* النهايات :

$$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{(x-1)\ln x} = +\infty$$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{(x-1)\ln x} = +\infty$$

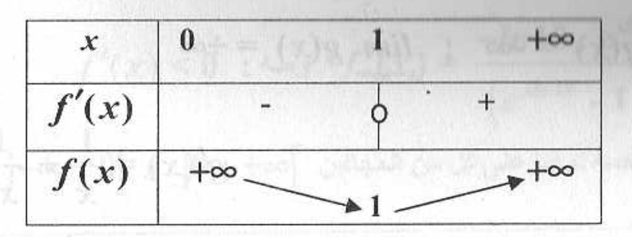
* المشتق :

$$f'(x) = \left(1 \, . lnx + (x - 1)\frac{1}{x}\right)e^{(x-1)lnx}$$

و منه : $f'(x) = g(x) \, . \, e^{(x-1)lnx}$ إذن : $f'(x)$ له نفس إشارة $g(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

إذن f متزايدة تماما على المجال $[1 \, ; \, +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0 \, ; \, 1]$.



x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

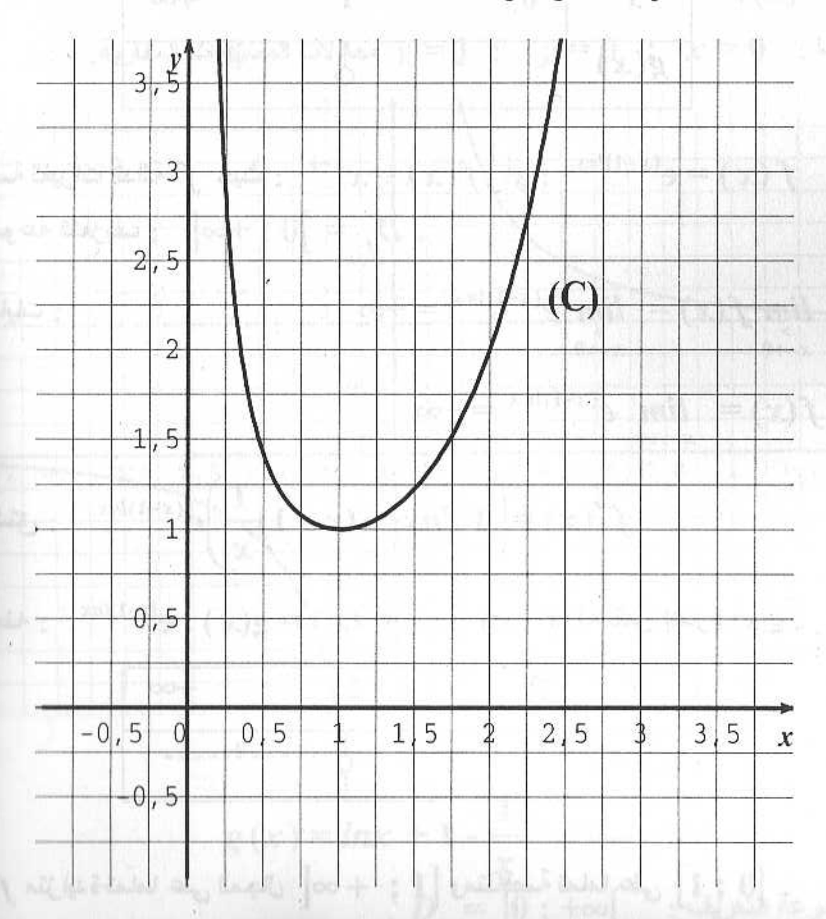
* دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة :

لدينا : $x = 0$ معادلة مستقيم مقارب .

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{(x-1)lnx}}{(x-1)\,lnx} \times \frac{(x-1)\,lnx}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{(x-1)lnx}}{(x-1)\,lnx} \times \frac{x-1}{x} \times lnx = +\infty$$

وعليه بيان الدالة f يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب عند $+\infty$.



8- المتتاليات و الاستدلال بالتراجع

1-الاستدلال بالتراجع :

تعريف :

لتكن $p(n)$ خاصية تتعلق بالعدد الطبيعي n .

نقول عن $p(n)$ أنها صحيحة من أجل $n \geq n_0$ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

1) $p(n_0)$ صحيحة.

2) إذا كانت $p(k)$ صحيحة فإن $p(k+1)$ صحيحة.

مثال 1 :

برهن على صحة الخاصية : $p(n) : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

الحل :

1) من أجل $n = 1$ لدينا : $1 = 1$ ومنه $p(1)$ صحيحة .

2) نفرض صحة $p(k)$ أي : $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

ونبرهن صحة $p(k+1)$ أي نبرهن أن :

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

لدينا :

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ومنه : $p(k+1)$ صحيحة وعليه : $p(n)$ صحيحة من أجل $n \geq 1$.

مثال 2 :

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد A_n يقبل القسمة على العدد 7 حيث : $A_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$.

الحل :

لتكن الخاصية $p(n)$ هي : A_n يقبل القسمة على العدد 7 .

1) لدينا : $A_0 = 9 - 2 = 7$ ومنه A_0 يقبل القسمة على العدد 7 .

2) نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$.

$$= 3^2 \times 3^{2k+2} - 2 . 2^{k+1}$$
$$= 9 \times 3^{2k+2} - 2 . 2^{k+1}$$
$$= (7 + 2) \times 3^{2k+2} - 2 . 2^{k+1}$$
$$= 7 . 3^{2k+2} + 2 \times 3^{2k+2} - 2 \times 2^{k+1}$$
$$= 7 . 3^{2k+2} + 2 \times \left(3^{2k+2} - 2^{k+1}\right)$$

ومنه : $A_{k+1} = 7 . 3^{2k+2} + 2 . A_k$

بما أن : A_k و $7 . 3^{2k+2}$ يقبلان القسمة على العدد 7 فإن A_{k+1} كذلك .

إذن $p(k+1)$ صحيحة ومنه $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2- المتتاليات التراجعية :

تعريف :

نسمي متتالية تراجعية كل متتالية من الشكل : $\begin{cases} U_0 = \alpha \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

حيث f دالة معينة ؛ أو $\begin{cases} U_0 = \alpha \ ; \ U_1 = \beta \\ U_{n+1} = \alpha f(U_n) + \beta f(U_{n-1}) \end{cases}$

مثال 1 :

نعرف المتتالية (U_n) كما يلي : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 5U_n - 1 \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

وهي متتالية تراجعية حيث يمكن حساب بقية الحدود فمثلا :

$U_1 = 5U_0 - 1$ ومنه : $U_1 = 4$

$U_2 = 5U_1 - 1$ ومنه : $U_2 = 19$ و هكذا .

مثال 2 :

نعرف المتتالية (U_n) كما يلي : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_1 = 3 \\ U_{n+1} = 2U_n - 4U_{n-1} \ , \quad n \geq 1 \end{cases}$

وهي متتالية تراجعية حيث يمكن حساب باقي الحدود فمثلا : $U_2 = 2U_1 - 4U_0$

ومنه : $U_2 = -2$ ؛ $U_3 = 2U_2 - 4U_1$ ومنه : $U_3 = -16$ وهكذا.

مبرهنة :

إذا كانت المتتالية (U_n) معرفة بـ : $\begin{cases} U_0 = \alpha \\ U_{n+1} = f(u_n) \ , \ n \geq 0 \end{cases}$

حيث f دالة متزايدة على مجال I يشمل كل حدود المتتالية فإن المتتالية (U_n) رتيبة .

3- المتتالية الحسابية :

- وهي معرفة بحدها الأول U_0 و بالعلاقة التراجعية :

$$U_{n+1} = U_n + r \quad , \quad r \in \mathbb{R}$$

r يسمى أساس المتتالية الحسابية .

- و حدها العام : $U_n = U_0 + nr \quad , \quad n \geq 0$

$$U_n = U_1 + (n-1)r \quad , \quad n \geq 1$$

$$U_n = U_p + (n-p)r \quad , \quad n \geq p$$

- مجموع حدودها : $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$

$$S = \frac{n+1}{2}\left(U_0 + U_n\right)$$

حيث $n+1$ هو عدد الحدود .

4- المتتالية الهندسية :

- وهي معرفة بحدها الأول U_0 و بالعلاقة التراجعية

$$U_{n+1} = U_n \times q \quad , \quad q \in \mathbb{R}$$

q يسمى أساس المتتالية الهندسية.

- وحدها العام :

$$U_n = U_0 \times q^n \quad , \quad n \geq 0$$

$$U_n = U_1 \times q^{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

$$U_n = U_p \times q^{n-p} \quad , \quad n \geq p$$

- مجموع حدودها : $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$

لما $q \neq 1$: $S = U_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

لما $q = 1$: $S = (n+1)\, U_0$

حيث $n+1$ هو عدد الحدود .

5- نهاية متتالية :

تبقى نهايات المتتاليات المدروسة سابقا صحيحة عندما : $n \to +\infty$ ولدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\,Lna} = +\infty \quad , \quad a > 1$$

$$\lim a^n = \lim e^{n\,Lna} = 0 \quad , \quad 0 < a < 1$$

من أجل $-1 < a < 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \times (-a)^n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n e^{nLn(-a)} = 0$$

من أجل $a \leq -1$:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \times (-a)^n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n e^{n\ln(-a)}$$

وهي غير موجودة لأنها غير وحيدة فمن أجل n زوجي : $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$

ومن أجل n فردي : $\lim_{n\to+\infty} a^n = -\infty$

أمثلة : $\lim_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$ ، $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ، $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n = 0$

$\lim_{n\to+\infty} (-4)^n$ غير موجودة .

6- المتتاليتان المتجاورتان :

نقول عن المتتاليتان (U_n) و (V_n) أنهما متجاورتان إذا كانت إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة و كانت : $\lim_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = 0$

مثال :

المتتاليتان (U_n) و (V_n) المعرفتان كما يلي :

$U_n = \frac{1}{n}$ و $V_n = \frac{-1}{n}$ متجاورتان لأن (U_n) متناقصة و (V_n) متزايدة.

ولدينا : $\lim_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{-1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$

مبرهنة :

إذا كانت (U_n) و (V_n) متتاليتان متجاورتان حيث (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة فإن :

- $U_n \leq V_n \quad , \quad n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = \lambda , \lambda \in \mathbb{R}$ • $U_n \leq \lambda \leq V_n$

التمـــاريـــن

التمرين 1 :

- ضع العلامة √ أمام كل جملة صحيحة و العلامة × أمام كل جملة خاطئة .

1) المتتالية (U_n) المعرفة بحدها العام : $U_n = 4^n$ هي متتالية حسابية.

2) المتتالية (U_n) المعرفة بحدها العام : $U_n = 4 . 2^n - 5$ هي متتالية هندسية.

3) $8 + 9 + 10 + \ldots + 100 = \frac{(100 - 7)(8 + 100)}{2}$

4) $1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{100} = \frac{1 - 5^{100}}{1 - 5}$

5) $10 + 10^2 + 10^2 + \ldots + 10^{50} = 10 \times \frac{1 - 10^{50}}{1 - 10}$

6) المتتاليتان (U_n) و (V_n) حيث $U_n = \frac{-10}{n^2}$ و $V_n = \frac{10}{n^2}$ متجاورتان.

7) في متتالية حسابية (U_n) هي دالة تآلفية .

8) في متتالية هندسية (U_n) هي دالة قوى العدد n .

9) إذا كانت الخاصية p(n) صحيحة من أجل n = 0 فهي صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

10) $\lim_{n\to+\infty} (-10)^n = -\infty$.

التمرين 2 :

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^n} + \ldots + \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

التمرين 3 :

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x) = (ax + b)e^x$ حيث a و b عددان حقيقيان.

برهن أن المشتق النوني للدالة f معرف بالعبارة :

التمرين 4 :

1) برهن بالتراجع على n أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $(1+x)^n \geq 1+nx$

2) ما هو التفسير البياني لهذه الخاصية.

التمرين 5 :

(U_n) متتالية معرفة كما يلي :
$$\begin{cases} U_0 = 16 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 20} \quad , \; n \geq 0 \end{cases}$$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n \geq 5$.

2) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة .

3) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة

4) احسب : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

التمرين 6 :

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بحدها الأول U_0 وبالعلاقة التراجعية :
$$U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2$$

1- احسب $U_{n+1} - 1$ بدلالة $U_n - 1$

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n - 1 = (U_0 - 1)^{2^n}$

3- ماذا يمكن القول في كل حالة مما يلي : $U_0 = 1$ ؛ $U_0 = 2$.

4- احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ في حالة $U_0 \in]0\,;1[$ ؛ ثم في حالة $U_0 \in]1\,;2[$.

5- احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ في حالة $U_0 < 0$ ثم $U_0 > 2$.

التمرين 7 :

لتكن المتتالية المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+U_n}{2}} \quad , \; n \geq 0 \end{cases}$$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 \leq U_n \leq 1$.

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n = cos\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$

3- استنتج : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

التمرين 8 :

(V_n) متتالية معرفة كما يلي :
$$\begin{cases} V_0 = 0 \\ V_1 = 1 \\ V_{n+1} = V_n + V_{n-1} \quad , \; n \geq 1 \end{cases}$$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :
$$V_n = \frac{1}{2^n \cdot \sqrt{5}} \left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n \right]$$

التمرين 9 :

(X_n) متتالية معرفة بالعبارة :
$$\begin{cases} X_0 = \alpha \\ X_n = 10\,X_{n-1} + 20 \quad , \; n \geq 1 \end{cases}$$

1) عبر عن X_n بدلالة α و n .

2) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n$.

التمرين 10 :

(U_n) متتالية معرفة كما يلي :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{3}\,U_n + \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n \geq 1$.

2) (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة : $V_n = U_n - 1$

- برهن أن (V_n) متتالية هندسية.

- استنتج اتجاه تغير (V_n).

- احسب V_n و U_n بدلالة n .

3) احسب المجموعين : S_1 , S_2 بدلالة n حيث :

$S_1 = V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1}$ و $S_2 = U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}$.

4) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = U_0^3 + U_1^3 + \ldots + U_{n-1}^3$

ثم احسب : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

التمرين 11 :

(U_n) متتالية معرفة كما يلي :

$U_1 = 2$ ؛ $U_2 = 1$ و من أجل $n \geq 2$: $U_n = \dfrac{2U_{n-1} + U_{n-2}}{3}$.

(V_n) متتالية معرفة كما يلي : $n \geq 2$ ، $V_n = U_n - U_{n-1}$

1- احسب V_n بدلالة V_{n-1} .

2- بين أن (V_n) متتالية هندسية معينا حدها الأول ثم أكتب V_n بدلالة n .

3- احسب المجموعة $S_n = V_2 + V_3 + ... + V_n$ بدلالة n .

4- احسب S_n بدلالة U_n و U_1 .

5- استنتج عبارة U_n بدلالة n .

6- احسب : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

التمرين 12 :

(U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث : $\begin{cases} U_1 \times U_3 = 144 \\ U_1 + U_2 + U_3 = 63 \end{cases}$

1- احسب كل من q أساس المتتالية و U_1 , U_2 , U_3 -2- أكتب U_n بدلالة n

3- احسب المجاميع : S_n , S'_n حيث :

$S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$ و $S^1_n = U_1^3 + U_2^3 + ... + U_n^3$

4- ما هي رتبة أول حد في المتتالية (U_n) أصغر من 3×10^{-4} .

5- لتكن (V_n) متتالية معرفة كما يلي : $V_n = Ln\, U_n$

بين أن (V_n) متتالية حسابية.

- احسب المجموع : $S = V_1 + V_2 + ... + V_n$.

التمرين 13 :

سعر الكيلوغرام الواحد من السكر هو 65DA في 1 جانفي 2006 . نفرض أن سعر الكيلوغرام الواحد يتزايد سنويا بنسبة قدرها 4% .

1) ما هو سعر السكر في 1 جانفي 2007 .

2) نعرف متتالية (U_n) على $\mathbb{N}$ كما يلي : $U_{n+1} - U_n = 0{,}04\, U_n$

- ما هي طبيعة المتتالية (U_n) ؟

- احسب U_n بدلالة n و حدها الأول U_1 .

- احسب المجموع : $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$ بدلالة n و U_1 .

3) ما هو سعر السكر في سنة 2020 ؟

4) بعد كم سنة يصير سعر السكر أكبر من 3 أضعاف ما كان عليه سنة 2006 .

التمرين 14 :

(U_n) متتالية معرفة كما يلي : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n - 2}{2U_n - 1} \quad ; \quad n \geq 0 \end{cases}$

1- برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n \neq 1$.

2- (V_n) متتالية معرفة كما يلي : $V_{n+1} = \dfrac{1}{U_n - 1}$, $n \geq 0$.

- بين أن (V_n) متتالية حسابية يطلب إعطاء حدها الأول .

- احسب V_n و U_n بدلالة n - احسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} V_n$.

التمرين 15 :

(U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان كما يلي :

$\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + 3V_n}{4} \quad ; \quad n \geq 0 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} U_0 = 12 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + 2V_n}{3} \quad ; \quad n \geq 0 \end{cases}$

1- احسب U_1 , V_1 , U_2 , V_2 .

2- نعرف المتتاليتان (W_n) كما يلي : $W_n = U_n - V_n$.

برهن أن (W_n) متتالية هندسية متقاربة .

3- بين أن المتتاليات (U_n) و (V_n) متجاورتان .

4- نعرف المتتالية (X_n) كما يلي : $X_n = 3U_n + 8V_n$.

برهن أن المتتالية (X_n) ثابتة .

5- استنتج U_n و V_n بدلالة n ثم : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.

الحلــــــــــــول

التمرين 1 : ---

1) ×	2) ×	3) √	4) ×
5) √	6) √	7) √	8) √
9) ×	10) ×		

التمرين 2 : ---

نضع :
$$p(n) : 1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

- من أجل $n = 0$ لدينا:

$1 = \frac{4}{3}\left[1 - \frac{1}{4}\right]$ أي : $1 = 1$ صحيحة ومنه : $p(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$.

$$p(k) : 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\right]$$

$$p(k+1) : 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^{k+1}} = \frac{4}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k+2}\right]$$

لدينا :
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^{k+1}} = \frac{4}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\right] + \frac{1}{4^{k+1}}$$

$$= \frac{4}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4^{k+1}}\right]$$

$$= \frac{4}{3}\left[1 - \frac{1}{4^{k+1}}\left(1 - \frac{3}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{3}\left[1 - \frac{1}{4^{k+2}}\right]$$

ومنه $p(k+1)$ صحيحة وعليه $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

التمرين 3 : ---

نفرض : $p(n) : \quad f^{(n)}(x) = (ax + b + na)\, e^x$

- من أجل $n = 1$: $f^{(1)}(x) = (ax + b + a)\, e^x$

ولدينا : $f'(x) = a \,.\, e^x + (ax + b)\, e^x$

وبالتالي : $f'(x) = (ax + b + a)\, e^x$ ومنه $p(1)$ صحيحة .

- نفرض $p(k)$ صحيحة و نبرهن صحة $p(k+1)$

$p(k) : \quad f^{(k)}(x) = (ax + b + ka)\, e^x$

$p(k+1) : \quad f^{(k+1)}(x) = (ax + b + (k+1)a)\, e^x$

لدينا : $f^{(k+1)}(x) = (f^k)'(x)$

و منه : $f^{(k+1)}(x) = ae^x + (ax + b + ka)\, e^x$

$= (ax + b + ka + a)\, e^x$

$= (ax + b + (k+1)\, a)\, e^x$

ومنه $p(k+1)$ صحيحة وبالتالي $p(n)$ صحيحة من أجل $n \geq 1$.

التمرين 4 : ---

نفرض : $p(n) : \quad (1 + x)^n \geq 1 + nx$

1) البرهان بالتراجع :

- من أجل $n = 0$ لدينا : $(1 + x)^0 \geq 1 + 0 \times x$

ومنه : $1 \geq 1$ صحيحة إذن $p(0)$ صحيحة.

- نفرض $p(k)$ صحيحة و نبرهن صحة $p(k+1)$.

$p(k) : \quad (1 + x)^k \geq 1 + kx$

$p(k+1) : (1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\, x$

لدينا : $(1 + x)^k \geq 1 + kx$

ومنه : $(1 + x)^k\, (1 + x) \geq (1 + kx)\, (1 + x)$

أي : $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + x + kx + kx^2$

إذن : $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x + kx^2$

لكن : $kx^2 \geq 0$ ومنه : $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\, x$

ومنه $p(k+1)$ صحيحة و بالتالي $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2) التفسير الهندسي :

لنعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = (1 + x)^n$

وليكن (C) تمثيلها البياني . معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي :

$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$

حيث : $f(0) = (1+0)^n = 0$ ؛ $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$

و منه : $f'(0) = n(1+0)^{n-1} = n$

وبالتالي معادلة المماس هي : $y = 1 + nx$

و بما أن : $(1+x)^n \geq 1 + nx$ أي : $f(x) \geq y$

فإن البيان (C) يقع فوق المماس .

التمرين 5 : --

1) نفرض : $p(n): \ U_n \geq 5$

- من أجل $n = 0$: $U_0 \geq 5$ وهي صحيحة لأن $U_0 = 16$

- نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

لدينا : $p(k): \ U_k \geq 5$ ؛ $p(k+1): \ U_{k+1} \geq 5$

من : $U_k \geq 5$ ينتج : $U_k + 20 \geq 25$

ومنه : $\sqrt{U_k + 20} \geq \sqrt{25}$ إذن : $U_{k+1} \geq 5$

ومنه $p(k+1)$ صحيحة وعليه $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2) تبيان أن (U_n) متناقصة :

لدينا : $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n + 20} - U_n$

$$= \frac{\left(\sqrt{U_n + 20} - U_n\right)\left(\sqrt{U_n + 20} + U_n\right)}{\sqrt{U_n + 20} + U_n}$$

$$= \frac{U_n + 20 - U_n^2}{\sqrt{U_n + 20} + U_n} = \frac{-U_n^2 + U_n + 20}{\sqrt{U_n + 20} + U_n}$$

لدينا : $\sqrt{U_n + 20} + U_n > 0$ لأن : $U_n \geq 5$

ومنه إشارة $U_{n+1} - U_n$ من إشارة : $-U_n^2 + U_n + 20$

لدينا : $\Delta = (1)^2 - 4(-1)(20) = 81$

وعليه يوجد جذران هما : 5 و 4- و بالتالي إشارة $-U_n^2 + U_n + 20$ هي:

U_n	$-\infty$		-4		5		$+\infty$
$-U_n^2 + U_n + 20$		-	0	+	0	-	

بما أن $U_n \geq 5$ فإن : $-U_n^2 + U_n + 20 \leq 0$

ومنه $U_{n+1} - U_n \leq 0$ وعليه (U_n) متناقصة تماما.

3) المتتالية (U_n) محدودة من الأدنى و متناقصة فهي متقاربة .

4) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$:

نفرض $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ فتكون $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \ell$

ولدينا $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 20}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{U_n + 20}$

وعليه $\ell = \sqrt{\ell + 20}$ إذن $\ell^2 = \ell + 20$ أي $\ell^2 - \ell - 20 = 0$

و حسب السابق للمعادلة حلين 5 (مقبول) و 4 - (مرفوض) إذن : $\ell = 5$.

التمرين 6 : --

1) حساب : $U_{n+1} - 1$ بدلالة $U_n - 1$

لدينا : $U_{n+1} - 1 = U_n^2 - 2U_n + 2 - 1$

ومنه : $U_{n+1} - 1 = U_n^2 - 2U_n + 1$

إذن : $U_{n+1} - 1 = \left(U_n - 1\right)^2$

2) البرهان بالتراجع على صحة $p(n)$: $U_n - 1 = \left(U_0 - 1\right)^{2^n}$

- من أجل $n = 0$: $U_0 - 1 = \left(U_0 - 1\right)^{2^0}$

وعليه : $U_0 - 1 = U_0 - 1$ ومنه $p(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $p(k)$ ونبرهن صحة $p(k+1)$

$p(k): U_k - 1 = (U_0 - 1)^{2^k}$

$p(k+1): U_{k+1} - 1 = (U_0 - 1)^{2^{k+1}}$

لدينا من (1) : $U_{k+1} - 1 = (U_k - 1)^2$

ومن فرضية التراجع ينتج : $U_{k+1} - 1 = \left[(U_0 - 1)^{2^k}\right]^2$

و منه : $U_{k+1} - 1 = (U_0 - 1)^{2\times 2^k} = (U_0 - 1)^{2^{k+1}}$

إذن : $p(k+1)$ صحيحة.

وعليه $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

أ)- في حالة $U_0 = 1$ لدينا : $U_n - 1 = (1 - 1)^{2^n} = 0$

ومنه $U_n = 1$ وعليه (U_n) متتالية ثابتة .

- في حالة $U_0 = 2$ لدينا : $U_n - 1 = (2 - 1)^{2^n} = 1$

ومنه : $U_n = 2$ و عليه (U_n) متتالية ثابتة.

4) - حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ في حالة $U_0 \in \,]0 ; 1[$:

لدينا : $U_n - 1 = (U_0 - 1)^{2^n}$ ومنه : $U_n = 1 + (U_0 - 1)^{2^n}$

و بما أن : $-1 < U_0 - 1 < 0$ ولدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$

فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_0 - 1)^{2^n} = 0$ إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$.

- في حالة $U_0 \in \,]1 ; 2[$ لدينا : $0 < U_0 - 1 < 1$

و بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_0 - 1)^{2^n} = 0$

ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + (U_0 - 1)^{2^n} = 1$

5) - حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ في حالة $U_0 < 0$:

بما أن : $U_0 - 1 < -1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$

فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_0 - 1)^{2^n}$ غير موجودة و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ كذلك.

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ في حالة $U_0 > 2$

بما أن : $U_0 - 1 > 1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$

فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_0 - 1)^{2^n} = +\infty$ و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

التمرين 7 : --

1) البرهان على صحة p (n) : $0 \le U_n \le 1$

- من أجل n = 0 : $U_0 = \frac{1}{2}$ ومنه $0 \le U_0 \le 1$ صحيحة

وعليه p (0) صحيحة.

- نفرض صحة p (k) و نبرهن صحة p (k + 1)

$p(k) : 0 \le U_k \le 1$ ؛ $p(k+1) : 0 \le U_{k+1} \le 1$

لدينا : $0 \le U_k \le 1$ وعليه : $1 \le 1 + U_k \le 2$

ومنه : $\frac{1}{2} \le \frac{1 + U_k}{2} \le 1$ وعليه : $\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sqrt{\frac{1 + U_k}{2}} \le 1$

وعليه : $\frac{\sqrt{2}}{2} \le U_{k+1} \le 1$ إذن : $0 \le U_{k+1} \le 1$

ومنه p (k + 1) صحيحة و عليه P (n) صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

2) البرهان على صحة p (n) : $U_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$

- من أجل n = 0 لدينا : $U_0 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ومنه p (0) صحيحة.

- نفرض صحة p (k) ونبرهن صحة p (k + 1)

لدينا : $p(k) : U_k = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^k}\right)$

$p(k+1) : U_{k+1} = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^{k+1}}\right)$

و لدينا : $U_{k+1} = \sqrt{\frac{1 + U_k}{2}}$ و منه :

$$U_{k+1} = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^k}\right)}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3 \times 2^k \times 2}\right) - 1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{3 \times 2^{k+1}}\right)}{2}} = \left|\cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^{k+1}}\right)\right|$$

لكن $U_n \ge 0$ ومنه $U_{k+1} = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^{k+1}}\right)$ إذن p (k + 1)

صحيحة و عليه الخاصية p (n) صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

3) استنتاج : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) = 1$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$.

التمرين 8 : --

البرهان على صحة p (n) : $V_n = \frac{1}{2^n . \sqrt{5}} \left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n \right]$

• من أجل n = 0 : $V_0 = \frac{1}{2^0 . \sqrt{5}} \left[\left(1+\sqrt{5}\right)^0 - \left(1-\sqrt{5}\right)^0 \right] = 0$

وعليه : p (0) صحيحة.

• نفرض صحة p (k) ونبرهن صحة p (k + 1) .

$$p(k) : V_k = \frac{1}{2^k . \sqrt{5}} \left[\left(1+\sqrt{5}\right)^k - \left(1-\sqrt{5}\right)^k \right]$$

$$p(k+1) : V_{k+1} = \frac{1}{2^{k+1} . \sqrt{5}} \left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{k+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{k+1} \right]$$

لدينا : $V_{k+1} = V_k + V_{k-1}$

$$V_{k+1} = \frac{1}{2^k . \sqrt{5}} \left[\left(1+\sqrt{5}\right)^k - \left(1-\sqrt{5}\right)^k \right] + \frac{1}{2^{k-1} . \sqrt{5}} \left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{k-1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{k-1} \right]$$

$$= \frac{1}{2^k.\sqrt{5}} \left[\left(1+\sqrt{5}\right)^k - \left(1-\sqrt{5}\right)^k + 2\left(1+\sqrt{5}\right)^{k-1} - 2\left(1-\sqrt{5}\right)^{k-1} \right]$$

$$= \frac{1}{2^k.\sqrt{5}} \left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{k-1}\left(1+\sqrt{5}+2\right) - \left(1-\sqrt{5}\right)^{k-1}\left(1-\sqrt{5}+2\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2^k.\sqrt{5}} \left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{k-1}\left(3+\sqrt{5}\right) - \left(3+\sqrt{5}\right)^{k-1}\left(1-\sqrt{5}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}.\sqrt{5}} \left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{k-1}\left(1+2\sqrt{5}+5\right)^k - \left(1-\sqrt{5}\right)^{k-1}\left(1-2\sqrt{5}+5\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}.\sqrt{5}} \left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{k-1}\left(6+2\sqrt{5}\right) - \left(1+\sqrt{5}\right)^{k-1}\left(6-2\sqrt{5}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}.\sqrt{5}} \left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{k-1}\left(1+\sqrt{5}\right)^2 - \left(1-\sqrt{5}\right)^{k-1}\left(1-\sqrt{5}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2^{k+1} . \sqrt{5}} \left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{k+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{k+1} \right]$$

وعليه p (k + 1) صحيحة . إذن p (n) صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

التمرين 9 : --

1- التعبير عن X_n بدلالة α و n: لدينا

$$10^0 \times \quad X_n = 10 X_{n-1} + 20$$
$$10^1 \times \quad X_{n-1} = 10 X_{n-2} + 20$$
$$10^2 \times \quad X_{n-2} = 10 X_{n-3} + 20$$
$$\vdots$$
$$10^{n-3} \times \quad X_3 = 10 X_2 + 20$$
$$10^{n-2} \times \quad X_2 = 10 X_1 + 20$$
$$10^{n-1} \times \quad X_1 = 10 X_0 + 20$$

بالجمع نجد : $X_n = 10^n . X_0 + 20 \left(10^0 + 10^1 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1}\right)$

ومنه : $X_n = 10^n . X_0 + 20 . 1 . \frac{1 - 10^n}{1 - 10}$

$$X_n = 10^n . X_0 - \frac{20}{9}\left(1 - 10^n\right)$$

$$X_n = 10^n . \alpha - \frac{20}{9}\left(1 - 10^n\right)$$

إذن : $X_n = \left(\alpha + \frac{20}{9}\right) 10^n - \frac{20}{9}$

2- حساب $\lim_{n \to +\infty} X_n$:

لدينا : $\lim_{x \to +\infty} 10^n = +\infty$ ومنه من أجل :

• بما أن $\alpha = \frac{-20}{9}$ فإن : $X_n = \frac{-20}{9}$ ومنه $\lim_{x \to +\infty} X_n = \frac{-20}{9}$

• $\lim_{x \to +\infty} X_n = +\infty$ من أجل: $\alpha > \frac{-20}{9}$

• $\lim_{x \to +\infty} X_n = -\infty$ من أجل: $\alpha < \frac{-20}{9}$

التمرين 10 : --

1 - البرهان على صحة الخاصية (n) و $U_n \geq 1$

- من أجل n = 0 : $U_0 = 4$ ومنه $U_0 \geq 1$ وعليه p (0) صحيحة.

$p(k): U_k \geq 1$

$p(k+1): U_{k+1} \geq 1$

لدينا : $U_k \geq 1$ ومنه : $\frac{1}{3}U_k \geq \frac{1}{3}$

وعليه : $\frac{1}{3}U_k + \frac{2}{3} \geq \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ وبالتالي : $U_{k+1} \geq 1$.

إذن p (k+1) صحيحة ومنه الخاصية p (n) صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

2- نبرهن أن (V_n) متتالية هندسية :

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \frac{1}{3}U_n + \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}U_n - \frac{1}{3}$$

إذن : $V_{n+1} = \frac{1}{3}(U_n - 1)$ و بالتالي : $V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$

وعليه : (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$.

- استنتاج اتجاه تغير (V_n) :

بما أن $V_0 = U_0 - 1 = 3$ أي $V_0 > 0$

و لدينا : $0 < q < 1$ فن (V_n) متناقصة تماما

- حساب V_n و U_n بدلالة n :

$V_n = V_0 \times q^n$ ومنه : $V_n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$

إذن : $V_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ و $U_n = V_n + 1$ ومنه : $U_n = \frac{1}{3^{n-1}} + 1$

3- حساب المجموعين S_1 و S_2 :

$$S_1 = V_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$$

$$S_1 = \frac{9}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

$$S_2 = U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}$$

$$S_2 = (V_0+1) + (V_1+1) + \ldots + (V_{n-1}+1)$$

$$= (V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1}) + \Big(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\text{n مرة}}\Big)$$

$$S_2 = S_1 + n \times 1$$

$$S_2 = \frac{9}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + n$$

4- حساب S_n :

$$S_n = U_0^3 + U_1^3 + \ldots + U_{n-1}^3$$

$$S_n = (V_0+1)^3 + (V_1+1)^3 + \ldots + (V_{n-1}+1)^3$$

$$S_n = (V_0^3 + 3V_0^2 + 3V_0 + 1) + (V_1^3 + 3V_1^2 + 3V_1 + 1) + \ldots + (V_{n-1}^3 + 3V_{n-1}^2 + 3V_{n-1} + 1)$$

$$S_n = V_0^3 + V_1^3 + \ldots + V_{n-1}^3 + 3(V_0^2 + V_1^2 + \ldots + V_{n-1}^2) + 3(V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1}) + \underbrace{1+1+\ldots+1}_{\text{n مرة}}$$

$$S_n = V_0^3 + (V_0 q)^3 + \ldots + (V_0 q^{n-1})^3 + 3\left[V_0^2 + (V_0 q)^2 + \ldots + (V_0 q^{n-1})^2\right] + 3S_1 + n.1$$

$$S_n = V_0^3\left[1+q^3+q^6+\ldots+q^{3(n-1)}\right] + 3V_0^2\left[1+q^2+q^4+\ldots+q^{2(n-1)}\right] + 3S_1 + n$$

$$S_n = V_0^3 \times \frac{1-(q^3)^n}{1-q^3} + 3V_0^2 . \frac{1-(q^2)^n}{1-q^2} + 3S_1 + n$$

$$S_n = V_0^3 \times \frac{1-q^{3n}}{1-q^3} + 3V_0^2 . \frac{1-q^{2n}}{1-q^2} + 3S_1 + n$$

$$S_n = 3^3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{3n}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^3} + 3(3)^2 . \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} + 3S_1 + n$$

$$S_n = 27 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{3n}}{1-\frac{1}{27}} + 27\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}}{1-\frac{1}{9}} + 3S_1 + n$$

$$S_n = \frac{(27)^2}{26}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{3n}\right] + \frac{27\times 9}{8}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right] + 3S_1 + n$$

$$S_n = \frac{729}{26}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{3n}\right] + \frac{243}{8}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right] + 3\times\frac{9}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right] + n$$

$$S_n = \frac{729}{26}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{3n}\right] + \frac{243}{8}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right] + \frac{27}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right] + n$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$: لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} = 0$ ؛

التمرين 11 : --

1 – حساب V_n بد لالة V_{n-1} :

$$V_n = U_n - U_{n-1} = \frac{2U_{n-1} + U_{n-2}}{3} - U_{n-1}$$

$$V_n = \frac{-U_{n-1} + U_{n-2}}{3} = -\frac{1}{3}\left(U_{n-1} - U_{n-2}\right)$$

إذن : $V_n = -\frac{1}{3} V_{n-1}$.

2 – تبيان أن (V_n) متتالية هندسية :

بما أن : $V_n = -\frac{1}{3} V_{n-1}$ فان (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{3}$

وحدها الأول $V_2 = U_2 - U_1 = -1$

- كتابة V_n بدلالة n :

$$V_n = V_2 \times q^{n-2} = (-1)\times\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-2}$$

إذن : $V_n = -\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-2}$

3- حساب S_n بدلالة n :

عدد الحدود : $n - 2 + 1 = n - 1$ و منه : $S_n = V_2 \times \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$

ومنه :

$$S_n = -1\times\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{-3}{4}\times\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$$

إذن : $S_n = -\frac{3}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$.

4 – حساب S_n بدلالة U_n و U_1 :

$$S_n = V_2 + V_3 + \ldots + V_n$$
$$S_n = (U_2 - U_1) + (U_3 - U_2) + (U_4 - U_3) + \ldots + (U_n - U_{n-1})$$
$$S_n = U_n - U_1$$

التمرين 12 : --

1) حساب سعر السكر في سنة 2007 .

لنفرض U_1 سعر السكر في سنة 2006 ،فيكون U_2 سعر السكر في سنة 2007 .

$$U_2 = U_1 + U_1 \times \frac{4}{100} = U_1 + U_1 \times 0{,}04$$

ومنه : $U_2 = 1{,}04 \,.\, U_1$ أي : $U_2 = 1{,}04 \times 65$

ومنه: $U_2 = 67{,}6$ ومنه سعر السكر في سنة 2007 هو : 67,6 DA

2) طبيعة المتتالية (U_n) :

لدينا : $U_{n+1} - U_n = 0{,}04\, U_n$ ومنه: $U_{n+1} = U_n + 0{,}04U_n$ وعليه :

$U_{n+1} = 1{,}04\, U_n$ إذن (U_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1{,}04$.

- حساب U_n بدلالة n و U_1 : $U_n = U_1 \times q^{n-1}$ ومنه: $U_n = U_1 \times (1{,}04)^{n-1}$

- حساب S_n: لدينا : $S_n = U_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

$$S_n = U_1 \times \frac{1-(1,04)^n}{1-1,04} = U_1 \times \frac{1-(1,04)^n}{-0,04}$$

$$S_n = \frac{-100\,U_1}{4}\left[1-(1,04)^n\right] = 25\,U_1\left[(1,04)^n - 1\right]$$

3) نفرض V_n سعر السكر في سنة n فيكون V_{n+1} سعر السكر في السنة

الموالية n+1 ولدينا : $V_{n+1} = V_n + V_n \times \frac{4}{100}$

إذن : $V_{n+1} = 1,04\,V_n$

إذن سعر السكر الجديد يتزايد حسب المتتالية الهندسية السابقة (U_n)

ومنه: $V_n = V_1 \times q^{n-1}$ بفرض V_1 هو سعر السكر في السنة 2007 .

إذن : $V_n = 65 \times (1,04)^{n-1}$

ويكون V_{15} هو سعر السكر في سنة 2020 ؛ ومنه : $V_{15} = 65\,(1,04)^{14}$

إذن : $V_{15} \simeq 112,5$ ومنه سعر السكر هو 112,5 DA .

4) عدد السنوات التي يصير فيها السكر أكبر من 3 أضعاف ما كان عليه :

$V_n \geq 3V_1$ ؛ $V_1 \times (1,04)^{n-1} \geq 3V_1$ ومنه: $(1,04)^{n-1} \geq 3$

وعليه : $ln(1,04)^{n-1} \geq ln3$ ومنه: $(n-1)\,ln(1,04) \geq ln3$

أي : $(n-1) \geq \frac{Ln3}{Ln(1,03)}$ ومنه : $n \geq 1 + \frac{ln3}{ln(1,03)}$

وعليه : $n \geq 39$ ومنه ابتداء من 39 سنة يصير سعر السكر أكبر من 3 أضعاف ما كان عليه في سنة 2006 .

التمرين 13 : --------------------------------

1) البرهان على صحة الخاصية $p(n)$ $U_n \neq 1$

- من اجل $n=0$: $U_0 = 0$ ومنه: $U_0 \neq 1$ ومنه : $p(0)$ صحيحة

- نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

$p(k) : U_k \neq 1$ ؛ $p(k+1) : U_{k+1} \neq 1$

لنبرهن بالعكس النقيض :

نفرض $U_{k+1} = 1$ و نبرهن أن $U_K = 1$

$U_{k+1} = 1$ معناه : $\frac{3U_k - 2}{2U_k - 1} = 1$ وعليه : $3U_k - 2 = 2U_k - 1$

وبالتالي : $U_k = 1$ ومنه: $p(k+1)$ صحيحة :

إذن الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

2) نبرهن أن (V_n) متتالية حسابية :

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}-1} - \frac{1}{U_n-1} = \frac{1}{\frac{3U_n-2}{2U_n-1}-1} - \frac{1}{U_n-1}$$

$$= \frac{2U_n-1}{U_n-1} - \frac{1}{U_n-1} = \frac{2U_n-2}{U_n-1} = \frac{2(U_n-1)}{U_n-1}$$

ومنه: $V_{n+1} - V_n = 2$ وعليه (V_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$.

حدها الأول $V_0 = \frac{1}{U_0-1}$ ومنه: $V_0 = -1$

- حساب V_n بدلالة n : $V_n = -1 + 2n$

- حساب U_n بدلالة n :

لدينا : $V_n = \frac{1}{U_n-1}$ ومنه : $V_n(U_n-1) = 1$

إذن: $V_n . U_n = 1 + V_n$ وعليه : $U_n = \frac{1+V_n}{V_n}$ وبالتالي :

$U_n = \frac{1-1+2n}{-1+2n}$ إذن : $U_n = \frac{2n}{2n-1}$.

حساب النهايات :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}(-1+2n) = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{2n-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{2n} = 1$$

التمرين 14 : --------------------------------

1) حساب $V_2 , V_1 ; U_2 , U_1$:

$$U_1 = \frac{U_0+2V_0}{3} = \frac{12+2}{3} = \frac{14}{3} \quad . \quad V_1 = \frac{U_0+3V_0}{4} = \frac{12+9}{4} = \frac{21}{4}$$

$$U_2 = \frac{U_1 + 2V_1}{3} = \frac{\frac{14}{3} + \frac{21}{2}}{3} = \frac{91}{18} \quad . \quad V_2 = \frac{U_1 + 3V_1}{4} = \frac{\frac{14}{3} + \frac{63}{4}}{4} = \frac{254}{48}$$

2) نبرهن أن (W_n) متتالية هندسية :

$$W_n = U_n - V_n$$

$$W_{n+1} = U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} - \frac{U_n + 3V_n}{4}$$

$$= \frac{4U_n + 8V_n - 3U_n - 9V_n}{12}$$

$$W_{n+1} = \frac{1}{12}(U_n - V_n) = \frac{1}{12} . W_n$$

ومنه (W_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$

وبما أن $-1 < q < 1$ فإن (W_n) متقاربة

3) تبيان أن (U_n) و (V_n) متجاورتان :

نبرهن أن (U_n) و (V_n) إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + 2V_n}{3} - U_n = \frac{-2(U_n - V_n)}{3}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 3V_n}{4} - V_n = \frac{U_n - V_n}{4}$$

نلاحظ أن إشارة $U_{n+1} - U_n$ عكس إشارة $U_n - V_n$

وإشارة $U_{n+1} - U_n$ نفس إشارة $U_n - V_n$ وعليه اتجاه تغير المتتاليتان متعاكستان . إذا كانت (U_n) متزايدة فإن (V_n) متناقصةو إذا كانت (U_n) متناقصة فإن (V_n) متزايدة

ولدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} W_n = 0$ ومنه : $\lim\limits_{x \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$

إذن : (U_n) و (V_n) متجاورتان.

4) نبرهن أن (X_n) ثابتة :

$$X_{n+1} - X_n = 3U_{n+1} + 8V_{n+1} - 3U_n - 8V_n$$

$$= U_n + 2V_n + 2U_n + 6V_n - 3U_n - 8V_n = 0$$

... (X_n) متتالية ثابتة

5) استنتاج U_n و V_n بدلالة n :

لدينا : $X_n = X_0$ لأن (X_n) ثابتة ومنه : $3U_n + 8V_n = 3U_0 + 8V_0$

أي أن : $3U_n + 8V_n = 44$ ولدينا : $U_n - V_n = W_n$

وعليه : $U_n - V_n = W_0 \times q^n$ إذن : $U_n - V_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$

إذن :

$$\begin{cases} 3U_n + 8V_n = 44 \\ U_n - V_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{cases}$$

وبضرب المساواة الثانية في 8 نجد :

ومنه :

$$\begin{cases} 3U_n + 8V_n = 44 \\ 8U_n - 8V_n = 88\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{cases}$$

بالجمع نجد : $11U_n = 44 + 88\left(\frac{1}{12}\right)^n$ ومنه : $U_n = 4 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n$

وعليه : $V_n = U_n - 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$ إذن $V_n = 4 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n - 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$

وبالتالي : $V_n = 4 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 4 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n = 4 \quad . \quad \lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} 4 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n = 4$$

9 – الحساب التكاملي

1- الحساب التكاملي و المساحات :

تعريف :

لتكن f دالة مستمرة و موجبة على المجال $[a , b]$ و (C) تمثيلها البياني .

مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمان الذين معادلتيهما : $x = a$ و $x = b$

هي : $\int_a^b f(x)\,dx$ وتقرأ التكامل من a إلى b لـ f.

مثال : $f(x) = x + 1$

مساحة المثلث OAB هي : $S = \frac{1 \times 1}{2}$

إذن : $S = \frac{1}{2}$ (وحدة المساحة)

وعليه : $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$

مبرهنة 1 :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

تعريف 2 :

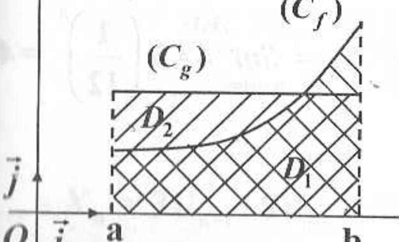
f دالة مستمرة و موجبة على مجال $[a ; b]$. نسمي القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a ; b]$ العدد الحقيقي :

$$\frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx$$

التفسير الهندسي :

g دالة ثابتة أي $g(x) = \alpha$

ليكن D_1 و D_2 المساحتين الملونتين في الشكل



حيث D_1 هو الجزء الأسفل (C_f) و D_2 هو الجزء الأسفل (C_g) القيمة المتوسطة للدالة f هي القيمة التي يجب إعطاءها للعدد α حتى يكون D_1 و D_2 متساويان.

تعريف 3 :

إذا كانت f دالة مستمرة و سالبة على المجال $[a ; b]$ و كان (C) تمثيلها البياني فإن A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معدلتها التي معادلتها $x = a$ و $x = b$ و $y = 0$ و تعطى بالعبارة :

$$A = \int_a^b -f(x)\,dx \quad \text{أو} \quad A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

أي أن : $\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

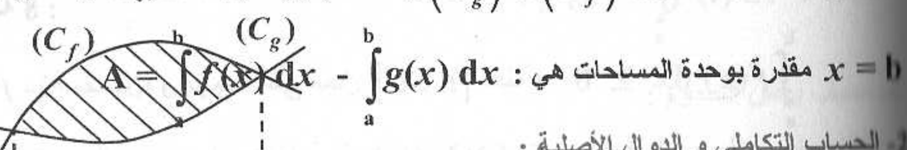
مبرهنة 2 :

إذا كانت f دالة مستمرة و سالبة على مجال $[a ; b]$ فإن قيمتها المتوسطة على $[a ; b]$

هي : $\frac{-1}{b - a}\int_a^b -f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b - a} f(x)\,dx$

مبرهنة 3 :

إذا كانت f و g دالتان مستمرتان على المجال $[a ; b]$ حيث $f > g$ فإن مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين الذين معادلتيهما $x = a$ و $x = b$ مقدرة بوحدة المساحات هي :



$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

2- الحساب التكاملي و الدوال الأصلية :

مبرهنة 4 :

f دالة مستمرة وموجبة على المجال $[a ; b]$، (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد. F دالة أصلية للدالة f على $[a ; b]$. مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها $x = a$ و $x = b$ و $y = 0$ تساوي مقدرة بوحدة المساحات إلى : F(b) - F(a)

إذن : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

ونكتب : $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

ولدينا : $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = \int_b^a -f(x)\,dx$

مبرهنة 5 :

f و g دالتان مستمرتان على مجال I.

a و b عنصران من I . α و β عددان حقيقيان

لدينا : $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta\, g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

مبرهنة 6 :

f دالة مستمرة على مجال I مركزه O . من أجل كل عنصر a من I لدينا :

- إذا كانت f زوجية فإن : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$
- إذا كانت f فردية فإن : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

مبرهنة 7 :

f دالة دورية على $\mathbb{R}$ ودورها T

من أجل كل عدد حقيقي a : $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$

3- الحساب التكاملي و المتباينات :

مبرهنة 8 :

لتكن f دالة مستمرة و موجبة على مجال $[a\,;\,b]$ لدينا : $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

مبرهنة 9 : f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a\,;\,b]$. إذا كان : $f \leq g$ فإن :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

مبرهنة 10 :

لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a\,;\,b]$ و M ,m عددان حقيقيان .

إذا كان $m \leq f(x) \leq M$ فإن : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)$

إذا كان $0 \leq |f(x)| \leq M$ فإن : $0 \leq \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M\,|b-a|$

تعريف 4 :

لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a\,;\,b]$. نسمي القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a\,;\,b]$ العدد الحقيقي : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

- المكاملة بالتجزئة :

مبرهنة 11 :

لتكن f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I و f' و g' مستمرتان على I.

من أجل كل عددان a و b من I فإن :

$$\int_a^b f'(x)\,.\,g(x)\,dx = [f(x)\,.\,g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x) f(x)\,dx$$

5- الدالة الأصلية التي تنعدم عند a :

مبرهنة 12 :

f دالة مستمرة على $[a\,;\,b]$. الدالة الأصلية g للدالة f و التي تنعدم عند a تعطى بالعبارة : $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

6- حساب بعض الحجوم :

f دالة مستمرة على مجال $[a\,;\,b]$. (C) تمثيلها البياني ولتكن (D) مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها :

$y = 0$ و $x = a$ و $x = b$

حجم الجزء المتولد عن دوران (D) حول محرر الفواصل يعطى بالعبارة :

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2\,dx$$

التمـــــاريـــن

التمرين 1 :

أذكر صحة أم خطأ مايلي باستعمال الرمز √ للصحة و الرمز × للخطأ :

1) مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحنى دالة f مستمرة على مجال $[a\ ;\ b]$ و المستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$ و $x = a$ و $x = b$ تعطى بالعبارة : $\int_a^b f(x)\,dx$

2) القيمة المتوسطة للدالة : $x \mapsto x^2$ على المجال $[3\ ;\ 6]$ هي : $\frac{1}{3}\int_3^b x^2\,dx = 63$

3) مساحة الحيز المستوي المحدد بالمستقيمات التي معادلاتها : $x = 1$ و $x = 2$ و $y = 0$ و $y = 2$ مقدرة بوحدة المساحات هي: 4 .

4) إليك الشكل المقابل :
مساحة الجزء المظلل يعطى بالعبارة :
$$A = \int_a^c [g(x) - f(x)]\,dx + \int_c^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

5) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2$

6) $\int_0^x cost\,dt = \sin x$

7) إذا كان : $f(x) \leq 1$ فإن : $\int_0^1 f(x)\,dx \leq 1$

8) $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \int_\pi^{3\pi} \sin x\,dx$

9) $\int_{-2}^{2} x^2\,dx = 2\int_0^2 x^2\,dx$

10) $\int_{-1}^{1} (x^3 + x)\,dx \neq 0$

11) $\int_1^2 [2f(x) - 3g(x)]\,dx = 2\int_1^2 f(x)\,dx - 3\int_1^2 g(x)\,dx$

12) $\int_0^1 (x^2 + 1)\,dx \leq \int_0^1 x^2\,dx$

13) $\int_1^2 x^2\,dx \leq 0$

14) $\int_1^2 (x^2 - 1)\,dx = \int_2^1 (1 - x^2)\,dx$

15) $\int_0^1 dt = x$

التمرين 2 :

أحسب التكاملات الآتية :

1) $\int_0^1 (x^2 - 4x + 5)\,dx$

2) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx$

3) $\int_0^1 x(x^2 - 4)^3\,dx$

4) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(x^3 + 3)^2}\,dx$

5) $\int_2^2 e^x\,dx$

6) $\int_0^1 (e^{2x} - e^x + 4)\,dx$

7) $\int_1^2 \left(e^{-x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$

8) $\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}\,dx$

9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\,dx$

10) $\int_0^{\pi} \cos 3x\,dx$

11) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$

12) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x + 1}}\,dx$

13) $\int_e^{2e} \frac{\ln x}{x}\,dx$

14) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx$

التمرين 3 :

f دالة معرفة على المجال $]-2 ; 1[$ بالعبارة : $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - x + 5}{x^2 + x - 2}$

1- بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1} + \dfrac{d}{x+2}$

حيث a و b و c و d أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

2- عين دالة أصلية g للدالة f.

3- احسب : $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx$

التمرين 4 :

f دالة معرفة على المجال $]-5 ; 5[$ بالعبارة : $f(x) = \dfrac{25}{25 - x^2}$

1- عين العددان α و β بحيث : $f(x) = \dfrac{\alpha}{5 - x} + \dfrac{\beta}{5 + x}$

2- احسب : $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$

3- بين أن : $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{2} f(x)\, dx$

4- احسب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ (الوحدة cm^2)

التمرين 5 :

f دالة معرفة على المجال $[0 ; 2]$ بالعبارة : $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

1- عين حصرا للدالة f على المجال $[0 ; 2]$.

2- استنتج حصرا للتكامل : $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{1 + x^2}\, dx$

التمرين 6 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = e^{x^2+1}$

2- عين حصرا للدالة f على المجال $[0 ; 2]$.

3- استنتج حصرا للتكامل : $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\, dx$ ثم التكامل : $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$.

التمرين 7 :

f دالة معرفة على $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ بالعبارة $f(x) = \cos x$

عين القيمة المتوسطة للدالة f على هذا المجال .

التمرين 8 :

أدرس تغيرات الدالة f حيث : $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ على المجال $[e ; 2e]$.

استنتج حصرا للتكامل $\displaystyle\int_{e}^{2e} \frac{x}{\ln x} dx$.

التمرين 9 :

احسب باستعمال قانون المكاملة بالتجزئة التكاملات الآتية .

1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x\, dx$ ؛ 2) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x \cos 3x\, dx$ ؛ 3) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} x\, e^{x}\, dx$

4) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$ ؛ 5) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$ ؛ 6) $\displaystyle\int_{0}^{1} (x + 1)\, e^{-x}\, dx$

التمرين 10 :

احسب مرتين بقانون التجزئة التكاملات الآتية.

1) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx$ ؛ 2) $\displaystyle\int_{0}^{x} t^2 \sin 2t\, dt$ ؛ 3) $\displaystyle\int_{1}^{2} (\ln x)^2\, dx$

4) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin x\, e^{x}\, dx$.

التمرين 11 :

أ) أدرس تغيرات الدالة f : $x \mapsto \sqrt{9 - x^2}$

ثم أنشئ تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول cm)

ب) استنتج مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل

(يمكن حساب y^2)

التمرين 12 :

نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة $f(x) = e^{2x} - 7e^{x} + 12$

1- ادرس إشارة $f(x)$.

2- احسب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) الممثل لتغيرات f في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i} , \vec{j})$ و محور الفواصل في المجال $[Ln3 ; Ln4]$. (الوحدة cm^2).

التمرين 13 :

احسب التكامل الآتي : $\int_{-2}^{5} \frac{|x|}{1 + x^2} dx$.

التمرين 14 :

1) ادرس تغيرات الدالة f حيث : $f(x) = \frac{e^{-x}}{1 - x}$

ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$

فإن : $1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

2) نعتبر التكامل : $I = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1 - x} dx$. ما هو التفسير الهندسي لهذا التكامل ؟

3) بين أن : $\frac{1}{1 - x} = 1 + x + \frac{x^2}{1 - x}$ من أجل $x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$

4) استنتج أن : $I = \int_{0}^{\frac{1}{2}} (1 + x) e^{-x} dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx$

5) احسب : $\int_{0}^{\frac{1}{2}} (1 + x) e^{-x} dx$

6) استنتج من (1) أن : $\frac{1}{24} \leq \int_{0}^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$

7) استنتج مما سبق قيمة مقربة إلى 0,01 للعدد I .

التمرين 15 :

نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x) = cosx$

1) أنشئ تمثيلها البياني (C) على المجال $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. (D) مساحة الحيز المحصور بين (C) و محور الفواصل في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i} , \vec{j})$ حيث وحدة هي Cm.

2) احسب حجم الحيز الذي نحصل عليه بدوران (D) حول محور الفواصل .

التمرين 16 :

أنشئ التمثيل البياني للدالة f حيث $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

لتكن (D) مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل.

احسب حجم الجسم المحصل عليه بدوران (D) حول محور الفواصل .

التمرين 17 :

لتكن f دالة معرفة على $[0 ; +\infty[$ بالعبارة : $f(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

1- بين أن : $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

2- ادرس تغيرات الدالة f.

3- احسب A مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $x = 0$ و $x = 1$ و $y = 1$.

التمرين 18 :

ليكن التكامل : $I_n = \frac{1}{n!} \int_{0}^{1} (1 - x)^n e^{x} dx$ حيث : $n \in \mathbb{N}^*$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0 ; 1]$ فإن :

$$0 \leq (1 - x)^n e^{x} \leq e$$

2) استنتج أن : $0 \le I_n \le \frac{e}{n!}$ و أن : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

3) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب I_1 .

4) بين أنه من أجل $n \ge 2$: $I_n = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}$

5) برهن بالتراجع أن : $I_n = -\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \dots + \frac{1}{2!}\right) + I_1$

و أن : $I_n = -\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \dots + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} + 1\right) + e$

6) بين أن : $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e$

الحلـــــول

التمرين 1 : --

(1	×	(2	√	(3	√	(4	√
(5	√	(6	√	(7	√	(8	√
(9	√	(10	×	(11	√	(12	×
(13	×	(14	√	(15	×		

التمرين 2 : -- (1

$$\int_0^1 (x^2 - 4x + 5)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{(1)^3}{3} - 2(1)^2 + 5(1)\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 2(0)^2 + 5 \times 0\right)$$

$$= \frac{1}{3} - 2 + 5 = \frac{1 - 6 + 15}{3} = \frac{10}{3}$$

(2

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{-1}{x} - \ln x\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{-1}{2} - \ln 2\right] - \left[\frac{-1}{1} - \ln 1\right]$$

$$= \frac{-1}{2} - \ln 2 + 1 = \frac{1}{2} - \ln 2$$

(3

$$\int_0^1 x\,(x^2 - 4)^3\,dx = \frac{1}{2} \times \int_0^1 2x\,(x^2 - 4)^3\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2 - 4)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{(1 - 4)^4}{4} - \frac{(0 - 4)^4}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{81}{4} - \frac{256}{4}\right] = \frac{-175}{8}$$

(4

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{(x^3 + 3)^2}\,dx = \frac{1}{3} \times \int_{-1}^1 \frac{3x^2}{(x^3 + 3)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{-1}{x^3 + 3}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{-1}{4}\right) - \left(\frac{-1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}$$

(5

$$\int_{-2}^2 e^x\,dx = \left[e^x\right]_{-2}^2 = e^2 - e^{-2}$$

(6

$$\int_0^1 (e^{2x} - e^x + 4)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + 4x\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^2 - e + 4\right) - \left(\frac{1}{2}e^0 - e^0 + 4(0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - e + 4 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - e + \frac{9}{2}$$

7) $$\int_1^2 \left(e^{-x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[-e^{-x} + \frac{1}{x}\right]_1^2$$

$$= \left(-e^{-2} + \frac{1}{2}\right) - \left(-e^{-1} + 1\right)$$

$$= -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{e} - 1$$

$$= -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} - \frac{1}{2}$$

8) $$\int_0^1 \left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right) dx = \left[\frac{-1}{e^x+1}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{e+1} - \frac{-1}{2} = \frac{-1}{e+1} + \frac{1}{2}$$

9) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,.\, (\sin x)' \, dx$$

$$= \left[\frac{\sin^2 x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\sin^2 0}{2} = \frac{1}{2}$$

10) $$\int_0^{\pi} \cos 3x \, dx = \left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{3}\sin 3\pi - \frac{1}{3}\sin 0 = 0$$

11) $$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

$$= -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\left[\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) - \ln(\cos 0)\right]$$

$$= -\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(1)\right] = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$$

12) $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \left[2\sqrt{x+1}\right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2$$

13) $$\int_e^{2e} \frac{\ln x}{x} dx = \int_e^{2e} \frac{1}{x} \times (\ln x)' \, dx$$

$$= \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_e^{2e} = \frac{(\ln 2e)^2}{2} - \frac{(\ln e)^2}{2}$$

$$= \frac{(\ln 2e)^2}{2} - \frac{1}{2}$$

14) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\sin\pi - \frac{1}{2}\sin 0 = 0$$

التمرين 3 : --

1- كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+2}$

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x-1)(x+2) + c(x+2) + d(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x^2+x-2) + cx + 2c + dx - d}{x^2+x-2}$$

$$f(x) = \frac{ax^3 + ax^2 - 2ax + bx^2 + bx - 2b + cx + 2c + dx - d}{x^2+x-2}$$

$$f(x) = \frac{ax^3 + (a+b)x^2 + (-2a+b+c+d)x - 2b + 2c - d}{x^2+x-2}$$

ومنه : $\begin{cases} a = 2 \\ a + b = 3 \\ -2a + b + c + d = -1 \\ -2b + 2c - d = 5 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c + d = 2 \\ 2c - d = 7 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 3 \\ d = -1 \end{cases}$ ،

إذن : $f(x) = 2x + 1 + \frac{3}{x - 1} - \frac{1}{x + 2}$

2- تعيين الدالة الأصلية للدالة f:

$$g(x) = x^2 + x + 3\ln|x - 1| - \ln|x + 2| + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

3- حساب : $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \left[x^2 + x + 3\ln|x - 1| - \ln|x + 2|\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 3\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{5}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4} + 3\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{5}{2} + \frac{1}{4} - 3\ln\frac{3}{2} + \ln\frac{3}{2}$$

$$= 1 - 3\ln 2 - \ln 5 + \ln 2 - 3\ln 3 + 3\ln 2 + \ln 3 - \ln 2$$

$$= 1 - \ln 5 - 2\ln 3$$

التمرين 4 : --

1- تعيين α و β بحيث : $f(x) = \frac{\alpha}{5 - x} + \frac{\beta}{5 + x}$

$$f(x) = \frac{\alpha(5 + x) + \beta(5 - x)}{(5 - x)(5 + x)} = \frac{(\alpha - \beta)x + 5\alpha + 5\beta}{25 - x^2}$$

ومنه : $\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 5\alpha + 5\beta = 25 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} \alpha = \beta \\ 10\alpha = 25 \end{cases}$ إذن: $\begin{cases} \alpha = 2,5 \\ \beta = 2,5 \end{cases}$

و بالتالي : $f(x) = \dfrac{\frac{5}{2}}{\ldots} + \dfrac{\frac{5}{2}}{\ldots}$

2- حساب : $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{-5}{2}\int_{-2}^{2} \frac{-1}{5 - x}\,dx + \frac{5}{2}\int_{-2}^{2} \frac{1}{5 + x}\,dx$$

$$= \left[\frac{-5}{2}\ln(5 - x) + \frac{5}{2}\ln(5 + x)\right]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{5}{2}\left[\ln(5 + x) - \ln(5 - x)\right]_{-2}^{2} = \frac{5}{2}\left[\ln\left(\frac{5 + x}{5 - x}\right)\right]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{5}{2}\left[\ln\frac{7}{3} - \ln\frac{3}{7}\right] = \frac{5}{2}\ln\left(\frac{49}{9}\right)$$

3- تبيان أن : $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{2} f(x)\,dx$

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \frac{5}{2}\left[\ln\left(\frac{5 + x}{5 - x}\right)\right]_{0}^{2} = \frac{5}{2}\left[\ln\frac{7}{3} - \ln 1\right]$$

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \frac{5}{2}\ln\frac{7}{3}$$

$$2\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 2 \times \frac{5}{2}\ln\frac{7}{3} = \frac{5}{2}\ln\left(\frac{7}{3}\right)^2$$

$$2\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \frac{5}{2}\ln\left(\frac{49}{9}\right)$$

ومنه : $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{2} f(x)\,dx$

4) حساب المساحة :

x	$-\infty$	-5		5	$+\infty$
$25 - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

لدينا : $25 - x^2 > 0$ في المجال $]-5 ; 5[$ ومنه $f(x) > 0$ في المجال $[0 ; 2]$

ومنه المساحة A هي : $A = \int_0^2 f(x)\,dx = \frac{5}{2} \ln \frac{7}{3}\ cm^2$

التمرين 5 : --

1) حصر الدالة f :

لدينا : $0 \le x^2 \le 4$ وعليه $1 \le 1+x^2 \le 5$

وبالتالي : $\frac{1}{5} \le \frac{1}{1+x^2} \le 1$ إذن : $\frac{1}{5} \le f(x) \le 1$

2- استنتاج حصر : $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ لدينا : $\frac{1}{5} \le f(x) \le 1$

ومنه : $\frac{1}{5}(2-0) \le \int_0^2 f(x)\,dx \le 1(2-0)$ إذن :

$\frac{2}{5} \le \int_0^2 f(x)\,dx \le 2$ وبالتالي : $\frac{2}{5} \le \int_0^2 \frac{1}{1+x^2}dx \le 2$

التمرين 6 : --

1) تبيان أن f زوجية : $D_f = \mathbb{R}$

من أجل كل عنصر x من $\mathbb{R}$: $-x \in \mathbb{R}$ و $f(-x) = e^{(-x)^2+1}$

أي $f(-x) = f(x)$ ومنه : f زوجية

2) تعيين حصرا للدالة f على $[0 ; 2]$

لدينا : $0 \le x \le 2$ ومنه $0 \le x^2 \le 4$

وعليه : $1 \le x^2 + 1 \le 5$ أي أن : $e \le e^{x^2+1} \le e^5$

وبالتالي : $e \le f(x) \le e^5$

3- استنتاج حصر : $\int_0^2 f(x)\,dx$

لدينا : $e \le f(x) \le e^5$

ومنه : $e(2-0) \le \int_0^2 f(x)\,dx \le e^5(2-0)$

إذن : $2e \le \int_0^2 f(x)\,dx \le 2e^5$

حصر التكامل : $\int_{-2}^2 f(x)\,dx$ بما أن f زوجية فإن :

$\int_{-2}^2 f(x)\,dx = 2\int_0^2 f(x)\,dx$ ولدينا : $2e \le \int_0^2 f(x)\,dx \le 2e^5$

وعليه : $4e \le 2\int_0^2 f(x)\,dx \le 4e^5$

إذن : $4e \le \int_{-2}^2 f(x)\,dx \le 4e^5$

التمرين 7 : --

القيمة المتوسطة للدالة f :

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2} - 2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}(1-0) = \frac{2}{\pi}$$

إذن القيمة الموسطة للدالة f هي $\frac{2}{\pi}$

التمرين 8 : --

- دراسة تغيرات f على $[e ; 2e]$:

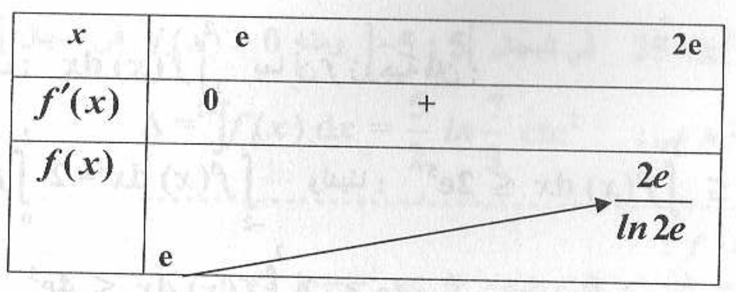
لدينا : $f(e) = \frac{e}{\ln e} = \frac{e}{1} = e$ ؛ $f(2e) = \frac{2e}{\ln 2e}$

$$f'(x) = \frac{1 . \ln x - \frac{1}{x} . x}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$f'(x) = 0$ معناه : $\ln x = 1$ ومنه $x = e$

$f'(x) > 0$ معناه : $\ln x > 1$ ومنه $x > e$

إذن : f متزايدة تماما على $[e ; 2e]$



x	e		2e
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	e	↗	$\frac{2e}{\ln 2e}$

استنتاج حصرا للتكامل :

لدينا : $e \le f(x) \le \frac{2e}{\ln 2e}$

ومنه : $e\,(2e - e) \le \int_e^{2e} f(x)\,dx \le \frac{2e}{\ln 2e}\,(2e - e)$

وعليه : $e^2 \le \int_e^{2e} f(x)\,dx \le \frac{2e^2}{\ln 2e}$

التمرين 9 : --

1) حساب : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x\,dx$

لدينا : $\int_a^b f'(x)\times g(x)\,dx = [f(x)\times g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\times g'(x)\,dx$

بوضع : $f'(x) = \sin x$ و $g(x) = x$ فنجد

$f(x) = -\cos x$ و $g'(x) = 1$ وعليه

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x\,dx = [-x\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos x\,dx$$

$$= [-x\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= [-x\cos x + \sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= (-\pi\cos\pi + \sin\pi) - \left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \pi + 0 + 0 - 1 = \pi - 1$$

ومنه : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x\,dx = \pi - 1$

2) حساب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 3x\,dx$

لدينا : $\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = [f(x)\;g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)\,f(x)\,dx$

بوضع : $f'(x) = \cos 3x$ و $g(x) = x$

نجد : $f(x) = \frac{1}{3}\sin 3x$ و $g'(x) = 1$

وعليه : $\int_0^{\pi} x\cos 3x\,dx = \left[\frac{1}{3}x\sin 3x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{3}\sin 3x\,dx$

$$= \left[\frac{1}{3}x\sin 3x\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{9}\cos 3x\right]_0^{\pi}$$

$$= \left[\frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x\right]_0^{\pi}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\pi\sin 3\pi + \frac{1}{9}\cos 3\pi\right) - \left(\frac{1}{3}\times 0\times\sin 0 + \frac{1}{9}\cos 0\right)$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{2}{9}$$

إذن : $\int_0^{\pi} x\cos 3x\,dx = -\frac{2}{9}$

3) حساب $\int_0^{\ln 2} x\,e^x\,dx$

لدينا : $\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = [f(x)\,.\,g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)\,f(x)\,dx$

بوضع : $f'(x) = e^x$ و $g(x) = x$

نجد : $f(x) = e^x$ و $g'(x) = 1$

لدينا : $\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \left[f(x)\,.\,g(x) \right]_a^b - \int_a^b g'(x)\ f(x)\, dx$

بوضع : $f'(x) = e^{-x}$ و $g(x) = x + 1$

فنجد : $f(x) = -e^{-x}$ و $g'(x) = 1$

ومنه :

$$\int_0^1 (x+1)\, e^{-x}\, dx = \left[-(x+1)\, e^{-x} \right]_0^1 - \int_a^b -e^{-x}\, dx$$

$$= \left[-(x+1)\, e^{-x} \right]_0^1 - \left[e^{-x} \right]_0^1$$

$$\int_0^1 (x+1)\, e^{x}\, dx = \left[-(x+1)\, e^{-x} - e^{-x} \right]_0^1 = \left[e^{-x}\,(-x-1-1) \right]_0^1$$

$$= \left[-(x+2)\, e^{-x} \right]_0^1 = e^{-1}\,(-3) - e^{0}\,(-2) = \frac{-3}{e} + 2$$

التمرين 10 : --

لدينا : $\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \left[f(x)\,.\,g(x) \right]_a^b - \int_a^b g'(x)\ f(x)\, dx$

1) حساب : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx$

بوضع : $f'(x) = \sin x$ و $g(x) = x^2$

فنجد : $f(x) = -\cos x$ و $g'(x) = 2x$

ومنه :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx = \left[-x^2 \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2x \cos x\, dx$$

$$= \left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\frac{\pi}{2} \right] - \left[-0^2 \cos 0 \right] + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx$$

إذن : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx$

حساب : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx$

بوضع : $f'(x) = \cos x$ و $g(x) = x$

فنجد : $f(x) = \sin x$ و $g'(x) = 1$

ومنه :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx = \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$$

$$= \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[x \sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx = \left(\frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} \right) - \left(0 + \cos 0 \right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

وعليه : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx = 2\left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$

2) حساب : $\int_0^{x} t^2 \sin 2t\, dt$

بوضع : $f'(x) = \sin 2t$ و $g(t) = t^2$

فنجد : $f(t) = -\frac{1}{2} \cos 2t$ و $g'(t) = 2t$

وعليه :

$$\int_0^{x} t^2 \sin 2t\, dt = \left[\frac{-1}{2}\, t^2 \cos 2t \right]_0^{x} - \int_0^{x} -t \cos 2t\, dt$$

$$= \frac{-1}{2} x^2 \cos 2x + \int_0^{x} t \cos 2t\, dt$$

حساب : $\int_0^{x} t \cos 2t\, dt$

بوضع : $f'(t) = \cos 2t$ و $g(t) = t$

فنجد : $f(t) = \frac{1}{2} \sin 2t$ و $g'(t) = 1$

ومنه : $\int_0^x t\cos 2t\,dx = \left[\frac{1}{2}\,t\,\sin 2t\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}\,\sin 2t\,dt$

$= \frac{1}{2}x\,\sin 2x - \left[\frac{-1}{2}\,t\cos 2t\right]_0^x$

$= \frac{1}{2}x\,\sin 2x - \left[\frac{-1}{4}\,\cos 2x + \frac{1}{4}\right]$

$= \frac{1}{2}x\,\sin 2x + \frac{1}{4}\,\cos 2x - \frac{1}{4}$

وبالتالي : $\int_0^x t^2\,\sin 2t\,dt = \frac{-1}{2}x^2\,\cos 2x + \frac{1}{2}x\,\sin 2x + \frac{1}{4}\,\cos 2x - \frac{1}{4}$

3) حساب : $\int_1^2 (\ln x)^2\,dx$

بوضع : $g(x) = (\ln x)^2$ و $f'(x) = 1$

فنجد : $g'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$ و $f(x) = x$

وعليه : $\int_1^2 (\ln x)^2\,dx = \left[x\,(\ln x)^2\right]_1^2 - \int_1^2 2\ln x\,dx$

$= 2\,(\ln 2)^2 - 2\int_1^2 \ln x\,dx$

حساب : $\int_1^2 \ln x\,dx$

بوضع : $g(x) = \ln x$ و $f'(x) = 1$

فنجد : $g'(x) = \frac{1}{x}$ و $f(x) = x$

ومنه : $\int_1^2 \ln x\,dx = [x\,\ln x]_1^2 - \int_1^2 1\,dx$

$= [x\,\ln x - x]_1^2 = (2\ln 2 - 2) - (1\ln 1 - 1)$

$= 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1$

وعليه : $\int_1^2 (\ln x)^2\,dx = 2\,(\ln 2)^2 - 2\,(2\ln 2 - 1)$

$= 2\,(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2$

$= 2\left[(\ln 2)^2 - 2\ln 2 + 1\right] = 2\,(\ln 2 - 1)^2$

4) حساب : $\int_0^\pi \sin x\, e^x\,dx$

بوضع : $g(x) = \sin x$ و $f'(x) = e^x$

فنجد : $g'(x) = \cos x$ و $f(x) = e^x$

ومنه : $\int_0^\pi \sin x\, e^x\,dx = \left[\sin x\, e^x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x\, e^x\,dx$

$= \sin\pi\, e^\pi - \sin 0\, e^0 - \int_0^\pi \cos x\, e^x\,dx = -\int_0^\pi \cos x\, e^x\,dx$

حساب : $\int_0^\pi \cos x\, e^x\,dx$

بوضع : $g(x) = \cos x$ و $f'(x) = e^x$

فنجد : $g'(x) = -\sin x$ و $f(x) = e^x$

وعليه : $\int_0^\pi \cos x\, e^x\,dx = \left[e^x\,\cos x\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\sin x\, e^x\,dx$

$= e^\pi\,\cos\pi - e^0\,\cos 0 + \int_0^\pi \sin x\, e^x\,dx$

إذن : $\int_0^\pi \cos x\, e^x\,dx = -e^\pi - 1 + \int_0^\pi \sin x\, e^x\,dx$

وبالتالي : $\int_0^\pi \sin x\, e^x\,dx = e^\pi + 1 - \int_0^\pi \sin x\, e^x\,dx$

إذن : $\int_0^\pi \sin x\, e^x\,dx + \int_0^\pi \sin x\, e^x\,dx = e^\pi + 1$

ومنه : $2\int_0^\pi \sin x\, e^x\, dx = e^\pi + 1$

ومنه : $\int_0^\pi \sin x\, e^x\, dx = \frac{1}{2}(e^\pi + 1)$

التمرين 11 :

1) دراسة تغيرات f :

* مجموعة التعريف : $D_f = [-3\,;\,3]$.

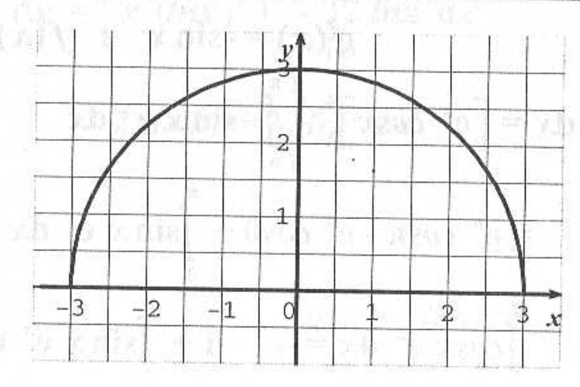
* لدينا : $f(-3) = 0$ و $f(3) = 0$.

* المشتق : $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$

x	-3		0		3
$f'(x)$		+	0	-	

ومنه f متزايدة تماما على $[-3\,;\,0]$ ومتناقصة تماما على $[0\,;\,3]$

x	-3		0		3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	3	↘	0



2) حساب y^2 : $y = \sqrt{9 - x^2}$

ومنه : $\begin{cases} y^2 = 9 - x^2 \\ \text{و} \\ y \geq 0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y \geq 0 \end{cases}$

وعليه : $A = \frac{\pi \times R^2}{2} = \frac{\pi \times 9}{2}$

إذن : $A = \frac{9\pi}{2}\ cm^2$

التمرين 12 :

1) دراسة إشارة $f(x)$:

ندرس إشارة : $e^{2x} - 7e^x + 12$

بوضع $e^x = \text{ع}$ نجد : $\text{ع}^2 - 7\text{ع} + 12$

لدينا : $\Delta = 1$ ومنه يقبل جذران : $\text{ع}_1 = 3$ و $\text{ع}_2 = 4$

وعليه : $\text{ع}^2 - 7\text{ع} + 12 = (\text{ع} - 3)(\text{ع} - 4)$

إذن : $e^{2x} - 7e^x + 12 = (e^x - 3)(e^x - 4)$

x	$+\infty$		$ln3$		$ln4$		$+\infty$
$e^x - 3$		-	0	+		+	
$e^x - 4$		-		-	0	+	
$(e^x - 3)(e^x - 4)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		+		-	0	+	

2) حساب المساحة A :

الدالة f مستمرة و سالبة في المجال $[ln3\,;\,ln4]$ ومنه :

$$A = -\int_{Ln3}^{Ln4} f(x)\,dx = -\int_{Ln3}^{Ln4} (e^{2x} - 7e^x + 12)\,dx$$

إذن : $A = -\left[\frac{1}{2}e^{2x} - 7e^x + 12x\right]_{Ln3}^{Ln4}$

$$A = -\left(\frac{1}{2}e^{2ln4} - 7e^{ln4} + 12\ln 4\right) + \left(\frac{1}{2}e^{2ln3} - 7e^{ln3} + 12ln3\right)$$

$$A = \left(-\frac{1}{2}\, e^{ln16} + 7\times 4 - 12\times 2ln2\right) + \left(\frac{1}{2}\, e^{ln9} + 7\times 3 + 12ln3\right)$$

$$A = \frac{-1}{2} \times 16 + 28 - 24ln2 + \frac{1}{2} \times 9 + 21 + 12ln3$$

$$A = -8 + 28 - 24ln2 + \frac{9}{2} + 21 + 12ln3$$

$$A = 41 + \frac{9}{2} - 24ln2 + 12ln3$$

$$A = \left(\frac{82+9}{2}\right) - 24ln2 + 12ln3$$

$$A = \left[\frac{91}{2} - 24\, ln2 + 12ln3\right] cm^2$$

التمرين 13 : --

حساب التكامل $\int_{-2}^{5} \frac{|x|}{1+x^2}\, dx$

$$\int_{-2}^{5} \frac{|x|}{1+x^2}\, dx = \int_{-2}^{0} \frac{|x|}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{5} \frac{|x|}{1+x^2}\, dx$$

$$= \int_{-2}^{0} \frac{-x}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{5} \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-2}^{0} \frac{2x}{1+x^2}\, dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{5} \frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ln(1+x^2)\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{2} \left[ln(1+x^2)\right]_{0}^{5}$$

$$= -\frac{1}{2} (ln1 - ln5) + \frac{1}{2} (ln26 - ln1)$$

$$= \frac{1}{2}\, ln5 + \frac{1}{2}\, ln26$$

التمرين 14 : --

- $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{-x} \times \frac{-x}{1-x} = +\infty$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ <}} \frac{e^{-x}}{1-x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{e^{-x}}{1-x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} \times \frac{1}{1-x} = 0$$

- $f'(x) = \frac{-e^{-x}\,(1-x) + e^{-x}}{(1-x)^2} = \frac{x\, e^{-x}}{(1-x)^2}$

إذن : $f'(x) = \frac{x\, e^{-x}}{(1-x)^2}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	||	+

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين : $[0 ; 1[$ و $]1 ; +\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty ; 0]$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0 +	||	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1 ↗ $+\infty$	|| $-\infty$ ↗	0

لبيان أن $1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$ في المجال $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$

في المجال $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ الدالة f متزايدة تماما وعليه :

بما أن : $0 \le x \le \frac{1}{2}$ فإن : $f(0) \le f(x) \le f\left(\frac{1}{2}\right)$

إذن : $1 \le f(x) \le \frac{e^{\frac{-1}{2}}}{\frac{1}{2}}$ و منه : $1 \le f(x) \le \frac{2}{\sqrt{e}}$

2- التفسير الهندسي للتكامل : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x}\,dx$

في المجال $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ الدالة f مستمرة موجبة ومنه : التكامل يمثل مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C) للدالة f و المستقيمات التي معادلاتها :

$$x = 0 \quad \text{و} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad y = 0$$

3- تبيان أن : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$

لدينا :
$$1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x) + x^2}{1-x}$$
$$= \frac{1 - x^2 + x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

4- استنتاج أن : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\,e^{-x}\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{1-x}\right)dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x}(1+x)\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \frac{e^{-x}}{1-x}\,dx$$

و عليه :
$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\,e^{-x}\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx$$

أ) حساب : $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\,e^{-x}\,dx$

قانون التجزئة :
$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = \left[f(x)\,.\,g(x)\right]_a^b - \int_a^b g'(x)\,f(x)\,dx$$

بوضع : $f'(x) = e^{-x}$ و $g(x) = 1 + x$

نجد : $f(x) = -e^{-x}$ و $g'(x) = 1$

إذن :
$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\,e^{-x}\,dx = \left[-(1+x)\,e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} -e^{-x}\,dx$$
$$= \left[-(1+x)\,e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left[-(1+x)\,e^{-x} - e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \left[-(2+x)\,e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(-(2+0)\,e^0\right) - \left(-\left(2 + \frac{1}{2}\right)e^{\frac{-1}{2}}\right)$$
$$= -2 + \frac{5}{2}\,e^{\frac{-1}{2}} = -2 + \frac{5}{2\sqrt{e}}$$

ب- الإستنتاج :

لدينا (1) : $1 \le f(x) \le \frac{2}{\sqrt{e}}$ ومنه : $x^2 \le x^2 f(x) \le \frac{2x^2}{\sqrt{e}}$

إذن :
$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx \le \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{e}}\,x^2\,dx$$
$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} \le \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx \le \left[\frac{2x^3}{3\sqrt{e}}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

إذن : $\frac{1}{24} \le \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx \le \frac{1}{12\sqrt{e}}$

7- استنتاج قيمة مقربة للعدد I :

لدينا : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\,e^{-x}\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx$

ولدينا : $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\,e^{-x}\,dx = 2 + \frac{5}{2\sqrt{e}}$

و $\frac{1}{24} \le \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx \le \frac{1}{12\sqrt{e}}$ ومنه :

$$-2+\frac{5}{2\sqrt{e}}+\frac{1}{24} \le \int_0^{\frac{1}{2}}(1+x)e^{-x}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx \le -2+\frac{5}{2\sqrt{e}}+\frac{1}{12\sqrt{e}}$$

وعليه : $\frac{-48\sqrt{e}+60+\sqrt{e}}{24\sqrt{e}} \le I \le \frac{-24\sqrt{e}+30+1}{12\sqrt{e}}$

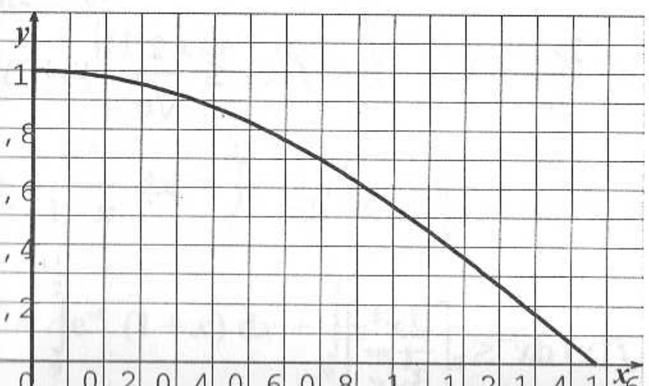
إذن : $\frac{60-47\sqrt{e}}{24\sqrt{e}} \le I \le \frac{31-24\sqrt{e}}{12\sqrt{e}}$

ومنه : $-0.44 \le I \le -0.43$

وعليه : $I \simeq -0{,}4$

التمرين 15 : --

1- إنشاء التمثيل البياني :



2- حساب الحجم :

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi\,[f(x)]^2\,dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$$

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$$

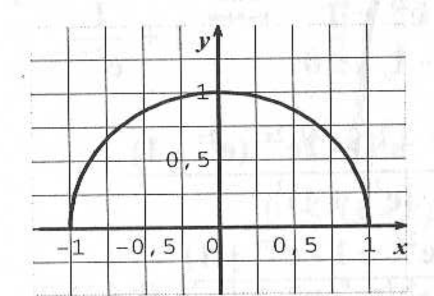
$$V = \pi \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$V = \pi\left[\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin\pi\right] - \pi\left[\frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{4}\sin 0\right] = \pi\left[\frac{\pi}{4}\right]$$

إذن : $V = \frac{\pi^2}{4}\ cm^3$

التمرين 16 : --

1- إنشاء البيان :



2- حساب الحجم :

$$V = \int_{-1}^{1} \pi\,[f(x)]^2\,dx = \int_{-1}^{1} \pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx$$

$$V = \pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \pi\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$V = \pi\left[1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right] = \pi\left[2-\frac{2}{3}\right] = \pi\times\frac{4}{3}$$

إذن : . $V = \frac{4\pi}{3}\ cm^3$

التمرين 17 : --

1- تبيان أن : $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

لدينا : $f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ ومنه : $f(x)=\frac{e^{x}-\frac{1}{e^{x}}}{e^{x}+\frac{1}{e^{x}}}$

وعليه : $f(x)=\frac{\frac{e^{2x}-1}{e^{x}}}{\frac{e^{2x}+1}{e^{x}}}$ وبالتالي : $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

2- دراسة تغيرات f :

• $f(0)=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=1$$

• $f'(x)=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1-e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2}$$

إذن : $f'(x)=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

وعليه : $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة تماما على $[0\,;+\infty[$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ 1

3- حساب المساحة :

لدينا : $f(x)<1$ ومنه :

$$A=\int_0^1[y-f(x)]\,dx=\int_0^1[1-f(x)]\,dx$$

$$A=\int_0^1\left(1-\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\right)dx=\left[x-ln\,(e^{x}+e^{-x})\right]_0^1$$

وعليه : $A=\left[1-ln\,(e+e^{-1})\right]-\left[0-ln2\right]$

$$A=\left[1-ln\left(e+\frac{1}{e}\right)+ln2\right]\ cm^2$$

التمرين 18 : ------------------------------------

1) تبيان أن : $0\le(1-x)^n e^{x}\le e$

لدينا : $0\le x\le 1$ ومنه : $-1\le -x\le 0$

وعليه : $0\le 1-x\le 1$ أي : $0\le(1-x)^n\le 1$

ولدينا : $1\le e^{x}\le e$

ومنه : $0\le(1-x)^n e^{x}\le e$

2) استنتاج أن : $0\le I_n\le\frac{e}{n!}$

لدينا : $0\le(1-x)^n e^{x}\le e$

ومنه : $0\,(1-0)\le\int_0^1(1-x)^n e^{x}dx\le e\,(1-0)$

إذن : $0\le\int_0^1(1-x)^n e^{x}dx\le e$

وعليه : $0\,.\,\frac{1}{n!}\le\frac{1}{n!}\int_0^1(1-x)^n e^{x}\,dx\le\frac{1}{n!}\,e$

وبالتالي : $0\le I_n\le\frac{e}{n!}$. لدينا : $\lim_{n\to+\infty}\frac{e}{n!}=0$

وعليه : $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$

3) حساب I_1 :

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)\, e^x \, dx$$

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \left[f(x)\, g(x) \right]_a^b - \int_a^b g'(x)\, f(x)\, dx$$

بوضع: $f'(x) = e^x$ و $g(x) = 1 - x$

فنجد: $f(x) = e^x$ و $g'(x) = -1$

ومنه:

$$\int_0^1 (1-x)\, e^x \, dx = \left[(1-x)\, e^x \right]_0^1 - \int_0^1 -e^x \, dx$$

$$= \left[(1-x)\, e^x \right]_0^1 + \left[e^x \right]_0^1$$

$$= \left[(1-x)\, e^x + e^x \right]_0^1$$

$$I_1 = \left[(2-x)\, e^x \right]_0^1 = e - 2$$

4- تبيان أن:

$$I_n = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}$$

$$I_n = -\frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n \, e^x \, dx$$

بالتجزئة نحسب: $\int_0^1 (1-x)^n \, e^x \, dx$

قانون التجزئة:

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \left[f(x) \, . \, g(x) \right]_a^b - \int_a^b g'(x)\, f(x)\, dx$$

بوضع: $f'(x) = e^x$ و $g(x) = (1-x)^n$

فنجد: $f(x) = e^x$ و $g'(x) = -n\left(1-x\right)^{n-1}$

ومنه:

$$\int_0^1 (1-x)\, e^x \, dx = \left[(1-x)^n \, e^x \right]_0^1 + n \int_0^1 (1-x)^{n-1} \, e^x \, dx$$

$$\int_0^1 (1-x)\, e^x \, dx = -1 + n \int_0^1 (1-x)^{n-1} \, e^x \, dx$$

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)\, e^x \, dx = -\frac{1}{n!} + \frac{n}{n!} \int_0^1 (1-x)^{n-1} \, e^x \, dx$$

$$I_n = -\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-x)^{n-1} \, e^x \, dx$$

إذن: $I_n = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}$

5- البرهان بالتراجع على صحة:

$$p(n) : I_n = -\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \ldots + \frac{1}{2!} \right) + I_1$$

- نتأكد من صحة $p(2)$: $I_2 = -\frac{1}{2} + I_1$

ومنه $p(1)$ صحيحة من (4).

- نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

$$p(k) : I_k = -\left(\frac{1}{k!} + \frac{1}{(k-1)!} + \ldots + \frac{1}{2!} \right) + I_1$$

$$p(k+1) : I_{k+1} = -\left(\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{k!} + \ldots + \frac{1}{2!} \right) + I_1$$

من (4): $I_{k+1} = -\frac{1}{(k+1)!} + I_k$

$$= -\frac{1}{(k+1)!} - \left(\frac{1}{k!} + \frac{1}{(k-1)!} + \ldots + \frac{1}{2!} \right) + I_1$$

$$= -\left(\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{k!} + \ldots + \frac{1}{2!} \right) + I_1$$

وعليه $p(k+1)$ صحيحة ومنه $p(n)$ صحيحة من أجل $n \geq 2$

البرهان على صحة الخاصية:

$$p(n) : I_n = -\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \ldots + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} \right) + e$$

- من أجل $n = 2$:

$$I_2 = -\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!}+1\right)+e = -\left(\frac{5}{2}\right)+e = e-\frac{5}{2}$$

ومن (4) : $I_2 = -\frac{1}{2!} + I_1$ إذن : $I_2 = -\frac{1}{2} + e - 2 = e - \frac{5}{2}$

ومنه p (2) صحيحة .

نفرض صحة p (k) ونبرهن صحة p (k + 1)

$$p(k) : I_k = -\left(\frac{1}{k!}+\frac{1}{(k-1)!}+\ldots+\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!}+1\right)+e$$

$$p(k+1) : I_{k+1} = -\left(\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{k!}+\ldots+\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!}+1\right)+e$$

من (4) :

$$I_{k+1} = -\frac{1}{(k+1)} + I_k$$

$$= \frac{-1}{(k-1)!}-\left(\frac{1}{k!}+\frac{1}{(k-1)!}+\ldots+\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!}+1\right)+e$$

$$= -\left(\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{k!}+\ldots+\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!}+1\right)+e$$

ومنه : p (k + 1) صحيحة

إذن p(n) صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

6- تبيان أن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e$

مما سبق : $I_n = -\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}+\ldots+\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}\right)+e$

ولدينا : $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

إذن : $\lim_{n\to+\infty}\left[-\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)+e\right]=0$

إذن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e$

10 – الإحتمـــالات

I - الاحتمالات المتساوية على مجموعة منتهية.

1 – مصطلحات :

- نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة . نسمى مجموعة النتائج الممكنة بمجموعة الإمكانيات و نرمز لها بالرمز Ω .
- كل جزء A من Ω يسمى حادثة .
- إذا احتوت المجموعة الجزئية A من Ω على عنصر وحيد فإنها تدعى حادثة أولية
- الحادثة الأكيدة هي Ω و الحادثة المستحيلة هي $\varnothing$.
- إذا كانت A حادثة فإن حادثتها العكسية هي $\overline{A}$ و هي التي تحتوي على كل عناصر Ω ما عدا عناصر A .
- لتكن A و B حادثتان نرمز ب $A\cap B$ للحادثة A و B و هي التي تحتوى على كل عناصر Ω والتي تنتمي إلى A وإلى B . إذا كانت $A\cap B$ خالية أي $A\cap B=\varnothing$ نقول عندئذ أن الحادثتين A و B غير متلائمتين.
- و نرمز بالرمز $A\cup B$ للحادثة A أو B و هي التي تحتوى على عناصر A وعناصر B أيضا

2 – قانون الاحتمال :

لتكن Ω مجموعة الإمكانيات المتعلقة بتجربة عشوائية :

$\Omega=\{e_1;e_2;...;e_i\}$ حيث : $e_1;e_2;...;e_i$ هي إمكانيات هذه التجربة و تسمى أيضا مخارج

قانون الاحتمال p للتجربة العشوائية هو إرفاق بالعناصر $e_1;e_2;...;e_n$ أعدادا حقيقية موجبة $p_1;p_2;...;p_n$ تسمى احتمالات المخارج $e_1;e_2;...;e_n$ على الترتيب .

و يكون قانون الاحتمال معرف بالجدول :

قيم Ω	e_1	e_2	...	e_n
الاحتمالات	p_1	p_2	...	p_n

ملاحظة 1 :

بما أن كل عدد من الأعداد $p_1;p_2;...;p_n$ موجب فهو أصغر من المجموع 1 و منه :

$0\le p_i\le 1$ من أجل $1\le i\le n$

ملاحظة 2 :

نمذجة تجربة عشوائية يعني إرفاقها بمجموعة إمكانيات Ω و قانون احتمال p على Ω .

3 – تساوي الاحتمال :

نقول عن تجربة أنها مساوية الاحتمال عندما يكون لكل الحوادث الأولية نفس الاحتمال

نقول عندئذ أن قانون الاحتمال متساوي التوزيع . فإذا كانت $\Omega=\{e_1;e_2;...e_n\}$ مجموعة الإمكانيات و كانت $p_1;p_2;...;p_n$ احتمالات المخارج $e_1;e_2;...;e_n$ على الترتيب فإن :

$$.p_1=p_2=...=p_n=\frac{1}{n}$$

وإذا كانت A حادثة تحتوي على m عنصرا يكون احتمالها $p(A)$ يحقق :

$$p(A)=m.\frac{1}{n}$$

إذن : $$\text{p(A)}=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

ملاحظة 3 :

بما أن : $p_1+p_2+...p_n=1$ فإن : $p(\Omega)=1$ وعليه نضع : $p(\varnothing)=0$.

4-خواص الاحتمالات :

لتكن Ω مجموعة الإمكانيات لتجربة عشوائية نزود Ω بالاحتمال p .

- من أجل كل حادثة A فإن : $0\le p(A)\le 1$
- إذا كانت A و B حادثتين غير متلائمتين $(A\cap B=\varnothing)$

فإن : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$
- إذا كانت A و B حادثتين كيفيتين فإن :

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$
- إذا كانت $\bar{A}$ الحادثة العكسية للحادثة A فإن : $p(\bar{A})=1-p(A)$
- $p(\Omega)=1$ و $p(\varnothing)=0$
- إذا كانت الحادثة A جزءا من الحادثة B $(A\subset B)$ فإن: $p(A)\le p(B)$.

تعاريف :

Ω مجموعة الإمكانيات لتجربة عشوائية حيث : $\Omega=\{e_1;e_2;......;e_n\}$.

p احتمالا معرفا على Ω ، $p_1;p_2;.....;p_n$ احتمالات المخارج $e_1;e_2;......;e_n$ على الترتيب .

- أمل قانون الاحتمال هو العدد E حيث : $E=e_1.p_1+e_2.p_2+....+e_n.p_n$
- تباين قانون الاحتمال هو العدد V حيث :

$$V=(e_1-E)^2.p_1+(e_2-E)^2.p_2+...+(e_n-E)^2.p_n$$

- الانحراف المعياري لقانون الاحتمال هو العدد S حيث : $S=\sqrt{V}$

و يمكن كتابة V على الشكل : $V=e_1^2.p_1+e_2^2.p_2+...+e_n^2.p_n-E^2$

تعريف 1 :

Ω مجموعة الإمكانيات المتعلقة بتجربة عشوائية . p احتمال معرف على Ω .

نسمي متغيرا عشوائيا X كل دالة عددية معرفة على Ω .

تعريف 2 :

X متغير عشوائي معرف على Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية و لتكن I مجموعة قيم X

اي : $I=\{x_1;x_2;.........;x_n\}$ و ليكن p_i احتمال الحادثة :

" X يأخذ القيمة x_i " أي $(X=x_i)$ حيث لدينا : $p_1+p_2+...........p_n=1$

قانون احتمال للمتغير العشوائي X هو الدالة المعرفة على I و التي ترفق بكل قيمة x_i من I العدد $p(X=x_i)$

تعريف 3 :

- الأمل لرياضياتي للمتغير X هو العدد $E(X)$

حيث : $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+.........+x_np_n$

- التباين للمتغير X هو العدد $V(X)$ حيث

$$V(X)=(x_1-E(X))^2p_1+(x_2-E(X))^2p_2+...+(x_n-E(X))^2p_n$$

الانحراف المعياري للمتغير X هو العدد $\sigma(X)$ حيث: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

- و يمكن كتابة : $V(X)=e_1^2p_1+e_2^2p_2+.......+e_n^2p_n-(E(X))^2$

حيث : $p_i=p(X=x_i)$ من أجل $i\in\{1,2,......,n\}$

II - العد :

1 – المبدأ الأساسي للعد :

إذا كان هناك إجراء معين يتم بـ : n_1 طريقة و إجراء ثان يتم بـ n_2 طريقة ، ... ، ثم إجراء من رتبة k يتم ب n_k طريقة فإن هذه الإجراءات تتم على التتابع بـ $n_1\times n_2\times...\times n_k$ طريقة

2 – القوائم :

تعريف :

n و p عددان طبيعيان غير معدومين E مجموعة ذات n عنصرا .

كل عنصر من الشكل (...) يسمى قائمة ذات p عنصرا من المجموعة E ...

حيث : $a_1, a_2, ..., a_p$ هي عناصر E وهي ليست جميعها مختلفة .

عدد القوائم :

عدد القوائم ذات p عنصرا من المجموعة E ذات n عنصرا هو n^p .

3 – الترتيبات :

تعريف :

n و p عددان طبيعيان حيث : $p \leq n$

نسمى ترتيبه ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا كل قائمة ذات p عنصرا متمايزة مثنى مثنى .

عدد الترتيبات :

لتكن الترتيبة $(a_1, a_2, ..., a_p)$ من E

عدد الترتيبات : $A_n^p = n(n-1)(n-2) \times ... \times (n-p+1)$

4 – التبديلات:

تعريف :

n عدد طبيعي غير معدوم .

نسمى تبديلة المجموعة E ذات n عنصرا كل ترتيبة ذات n عنصرا من E .

عدد التبديلات هو: $A_n^n = n(n-1)(n-2)...(n-n+1)$

إذن : $A_n^n = n(n-1)(n-2) \times ... \times 1$

الرمز عاملي : العدد $n(n-1)(n-2) \times ... \times 2 \times 1$ يرمز له بالرمز $n!$ و نكتب

$$n! = n(n-1) \times ... \times 2 \times 1$$

الرمز $n!$ يقرأ : n عاملي .

اصطلاحا : $1! = 1$ و $0! = 1$ و منه : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ و $A_n^n = n!$

تعريف :

n و p عددان طبيعيان حيث : $p \leq n$. E مجموعة ذات n عنصرا .

نسمى توفيقة ذات p عنصرا من E كل جزء من E يشمل p عنصرا من E .

عدد التوفيقات :

يعطي عدد التوفيقات ذات p عنصرا من E بالعبارة : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

أي : $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)! \times p!}$

ملاحظة :

نرمز لعدد التوفيقات بالرمز : C_n^p أو $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$

خواص C_n^p :

لدينا الخواص التالية للعدد C_n^p :

$C_n^0 = 1$ ؛ $C_n^1 = n$ ؛ $C_n^n = 1$ ؛ $C_n^p = C_n^{n-p}$

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

المثلث العددي: و يعتمد في حساب C_n^p على الخواص الخمسة السابقة :

$n \backslash p$	0	1	2	3	...	p-1	p	...	n-1	n
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0						0
2	1	2	1	0						0
3	1	3	3	1	0					0
⋮										
p-1	1					1	0			0
p	1						1			0
⋮										
n-1	1					C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^p		1	0
n	1						C_n^p			1

دستور ثنائي الحد: إذا كان a و b عددان طبيعيان و n عدد طبيعي غير معدوم فان:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^{n-0} b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + ... + C_n^n a^{n-n} b^n$$

III - الاحتمالات الشرطية :

-الأحداث المستقلة :

تمهيد :

لتكن Ω مجموعة الإمكانيات المتعلقة بتجربة عشوائية .

p احتمال معرف على Ω . A و B حادثتان حيث : $p(A) \neq 0$

تعريف 1 :

نسمي احتمال الحادثة B علما أن الحادثة A محققة العدد $p_A(B)$

و هو معرف بالعبارة : $p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$

- من التعريف لدينا : $p_A(\Omega)=1$
- إذا كانت B_2,B_1 حادثتان غير متلائمتان فإن :

$$p_A(B_1\cup B_2)=p_A(B_1)+p_A(B_2)$$

$$p(A\cap B)=p(B)\times p_B(A)=p(A)\times p_A(B)$$

نقول عن حادثتين A و B أنهما مستقلتين إذا و فقط إذا كانت :

$p(A\cap B)=p(A).p(B)$ أي: $p_A(B)=p(B)$

مبرهنة :

إذا كانت A و B حادثتين مستقلتين فإن A و $\overline{B}$ مستقلتين .

IV - دستور الاحتمالات الكلية :

Ω مجموعة الإمكانيات المتعلقة بتجربة عشوائية . P احتمال معرف على Ω .

تعريف :

نقول عن الحوادث $A_1,A_2,......,A_n$ أنها تجزئة للمجموعة Ω إذا وفقط إذا كانت

1- كل من هذه الحوادث غير مستحيلة .

2- كل حادثتين من هذه الحوادث غير متلائمتين .

3- اتحاد هذه الحوادث يساوي Ω .

مبرهنة: (دستور الاحتمالات الكلية)

Ω مجموعة الامكانيات المتعلقة بتجربة عشوائية .

P احتمال معرف على Ω. $(A_1,A_2,.....,A_n)$ تجزئة للمجموعة Ω .

إذا كانت A حادثة من Ω فإن :

$P(A)=P_{A_1}(A).P(A_1)+P_{A_2}(A).P(A_2)+...+P_{A_n}(A).P(A_n)$ و يسمى دستور الاحتمالات الكلية .

V - قوانين الاحتمالات المتقطعة :

1 - قانون التوزيع المنتظم :

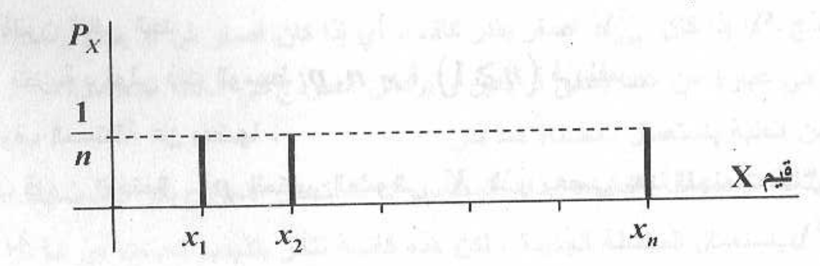
ليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه : $x_1\ ,\ x_2\ ,\ ...,x_n$ و ليكن p_X قانون الاحتمال المعرف على مجموعة قيم المتغير العشوائي كما يلي :

$$p_X(x_1)=p_X(x_2)=...=p_X(x_n)=\frac{1}{n}$$

هذا القانون يسمى قانون التوزيع المنتظم و نقول أن المتغير العشوائي X يتبع قانون توزيع منتظم . و هو موضح في الجدول الآتي :

قيم X	x_1	x_2	...	x_n
الاحتمال p_X	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

و يكون تمثيله كما يلي :



2 – قانون برنولي :

تعريف :

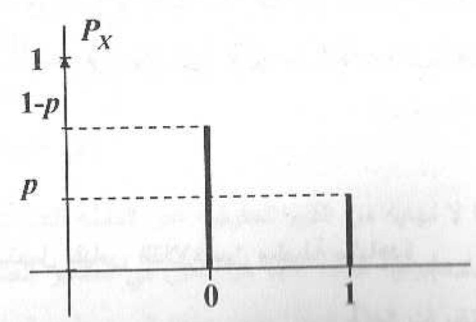
p عدد حقيقي حيث : $0<p<1$.

كل تجربة لها مخرجين فقط احتمالهما p و $1-p$ عل الترتيب تسمى تجربة برنولي ذات الوسيط p.

و المتغير العشوائي X في هذه التجربة يأخذ قيمة 1 في حالة نجاح التجربة و القيمة 0 في حالة رسوبها و نسميه المتغير العشوائي ذو الوسيط p لبرنولي و القانون p_X للمتغير العشوائي X يسمى قانون برنولي ذو الوسيط p و يعرف كما يلي :

قيم X	1	0
p_X	p	$1-p$

و يكون تمثيله كما يلي :



مبرهنة :

ليكن X المتغير العشوائي ذو الوسيط p لبرنولي .

- الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X :

$$E(X) = 1.p + 0.(1-p) = p$$

$$V(X) = p(1-p)^2 + (1-p)(0-p)^2 = p(1-p)$$

3 – قانون ثنائي الحد :

نكرر تجربة برنولي ذات الوسيط n, p مرة $(n \geq 1)$ في نفس الظروف المستقلة عن بعضها .

يعرف قانون الاحتمال p_X للمتغير العشوائي X الذي يحصي عدد النجاحات خلال n تجربة :

كما يلي : $p_X(k) = \left[\begin{smallmatrix} n \\ p \end{smallmatrix}\right].p^k.(1-p)^{n-k}$

من أجل : $k \in \{0 , 1 ,..., n\}$

- الأمل الرياضي و التباين و الانحراف المعياري لمتغير عشوائي يتبع القانون الثنائي ذو الوسيطين n و p تعطي على الترتيب كما يلي : $E(X) = np$ و

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \text{ و } V(X) = np(1-p)$$

- التلاؤم مع قانون احتمال متقطع :

1 – قياس التلاؤم بين سلسلة مشاهدة و نموذج احتمالي

لتكن السلسلة الإحصائية $(x_i , n_i)_{i\in\{1,...,k\}}$ ذات المقياس n .

p نموذج احتمالي قابل للتعبير عنها .

لقياس التلاؤم بين النموذج p و هذه السلسلة المشاهدة ، نقارن بين

التوترات : f_i $\left(f_i = \frac{n!}{n}\right)$ من أجل $i \in \{1,...,k\}$ مع الاحتمالات p_i الذي

يعطيها النموذج p للقيمة x_i

تعريف :

المؤشر d_{obs}^2 الذي يستعمل لقياس التلاؤم بين سلسلة مشاهدة $(x_i , n_i)_{i\in\{1,...,k\}}$ و

نموذج احتمالي متقطع و متساوي الاحتمالات حيث : من أجل $p_i = \frac{1}{k}$

$i \in \{1,...,k\}$ هو مجموع مربعات المسافة بين التواترات $(f_i)_{i\in\{1,...,k\}}$ و الاحتمالات :

$(p_i)_{i\in\{1,...,k\}}$

$$d_{obs}^2 = (f_1 - p_1)^2 + (f_2 - p_2)^2 + ... + (f_k - p_k)^2$$

ملاحظة : المؤشر d_{obs}^2 يستعمل في حالة كون النموذج الاحتمالي متقطع ومتساوي الاحتمالات

2– عتبة رفض نموذج احتمالي :

يقبل النموذج P إذا كان d_{obs}^2 أصغر بقدر كاف . أي إذا كان أصغر من أو يساوي عتبة محددة و هي عبارة عن عدد يعطى أو يعين و يرفض النموذج في الحالة المعاكسة .

و عادة تعين العتبة باستعمال المحاكاة كما يلي :

نحاكي السلسلة الإحصائية المشاهدة ذات المقياس n باستعمال النموذج p نحسب بعد ذلك المؤشر d^2 باستعمال السلسلة الجديدة ، لكن هذه القيمة تتأثر بتذبذب العينات أي أنه لو نقوم بمحاكاة جديدة نجد قيمة أخرى للمؤشر d^2 وهذا يعني أن قيم هذا المؤشر تتغير بتغير السلسلة ، لهذا نقوم عمليا بتكرار المحاكاة عدد كبير من المرات و ليكن N و نحسب d^2 من أجل كل سلسلة .

- نتحصل من الخطوات السابقةعلى سلسلة من القيم d^2 مقاسها N نلخص هذه الأخيرة بالعشيرات .

نختار كعتبة L العشير التاسع D_9 و منه ينتج :

- إذا كان $d_{obs}^2 \leq L$ فإن النموذج p مقبول .
- إذا كان $d_{obs}^2 > L$ فإن النموذج p مرفوض .

ملاحظة :

ان رفض نموذج احتمالي p و فق القاعدة السابقة يحمل مجازفة بالخطأ ذلك أننا قررنا القبول بهذا النموذج إذا كانت 90% من قيم d^2 أصغر أو تساوي العدد L و 10% من قيم d^2 أكبر من L .لهذا نقول عند رفض النموذج أننا رفضناه بمجازفة بالخطأ قدرها 10%

VI– قوانين الاحتمالات المستمرة :

تعريف :

إذا قبل متغير عشوائي ما لا نهاية من القيم الحقيقية غير القابلة للعد، فهذا يعني أنه لا يمكن التعبير عنه بواسطة أعداد طبيعية كأدلة ،كما هو الحال في المتغير العشوائي المتقطع لذلك نسمي هذا النوع من المتغيرات العشوائية " متغير عشوائي مستمر "

الدالة " كثافة الاحتمال " :

تعريف :

نسمي دالة كثافة احتمال كل دالة f معرفة على المجال $[\alpha ; \beta]$ و تحقق الشروط الآتية

1) f مستمرة على المجال $[\alpha ; \beta]$

2) $f(x) \geq 0$ من أجل كل x من $[\alpha ; \beta]$

3) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1$ (أي مساحة الحيز المستوي المحدد بمحور الفواصل و منحنى الدالة f و المستقيمين الذين معادلتيهما : $x = \alpha$ و $x = \beta$ تساوي 1) .

ملاحظة :

إذا كانت الدالة f معرفة على مجال غير محدود كالمجال $[\alpha ; +\infty[$

مثلا فإن الشرط المتعلق بالمساحة يكتب : $\lim_{x \to +\infty} \int_{\alpha}^{x} f(t)dt = 1$

تعريف :

ليكن X متغيرا عشوائيا مستمرا يأخذ قيمه في المجال I من $\mathbb{R}$ و الدالة f كثافة احتمال معرفة على I . نقول إن قانون الاحتمال p_X للمتغير العشوائي X يقبل f كثافة احتمال له ،إذا تحقق من أجل كل مجال $[a ; b]$ من $\mathbb{R}$ ومحتوى في I:

$$p_X([a ; b]) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

3 – القانون المنتظم على $[0 ; 1]$:

تعريف :

لتكن f دالة ثابتة معرفة على المجال $[0 ; 1]$ و تأخذ القيمة 1 على هذا المجال . نسمي قانون الاحتمال الذي يقبل f كدالة كثافة احتمال ، القانون المنتظم على المجال $[0 ; 1]$.

4 – الأمل الرياضي ، التباين ، و الانحراف المعياري :

تعريف :

X متغير عشوائي مستمر يتبع قانون احتمال يقبل f دالة كثافة له معرفة على المجال $[\alpha ; \beta]$ من $\mathbb{R}$.

لدينا: $E(X) = \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx$ ، $V(X) = \int_{\alpha}^{\beta} (x - E(X))^2 f(x)dx$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

ملاحظة : إذا كانت الدالة f معرفة على مجال غير محدود كالمجال $[\alpha ; +\infty[$ مثلا فإن :

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_{\alpha}^{x} tf(t)dt \text{ و } V(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_{\alpha}^{x} (t - E(X))^2 f(t)dt$$

و في حالة عدم وجود النهايات أو كانت غير منتهية فإن الأمل الرياضياتي غير موجود و عليه فالتباين غير موجود .

و لتسهيل حساب التباين لدينا :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2$$

5 – القانون الأسي :

خاصية : الدالة f المعرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \lambda . e^{-\lambda x}$

حيث : λ عدد حقيقي موجب تماما ، هي دالة كثافة احتمال

تعريف :

ليكن λ عدد حقيقي موجب تماما.

يسمى قانون الاحتمال الذي يقبل الدالة f دالة كثافة له حيث f معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بالعبارة: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ، القانون الأسي ذو الوسيط λ.

التمارين

التمرين 1 :

يحتوي كيس على 40 كرية مرقمة من 1 إلى 30 .سحب من الكيس كرية واحدة و نسجل رقمها .

1- عين المجموعة الشاملة Ω

2- عين الحوادث التالية : A : "الحصول على رقم مضاعف للعدد 8 "

B : " الحصول على رقم مضاعف للعدد 6"

C : " الحصول على رقم أولي"

D : " الحصول عل رقم فردي "

3- عين الحوادث التالية :

$$\overline{C \cap D}, C \cap D, \bar{C} \cap \bar{D}, \bar{D} \cap \bar{C}, A \cap B$$

التمرين 2 :

زهرة نرد مزيفة أوجهها مرقمة من 1 إلى 6.نرمي الزهرة نحو الأعلى مرة واحدة و نراقب الوجه العلوي الذي يظهر عند السقوط . احتمالات الأوجه الستة $p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , p_5 , p_6$

تشكل حدود متتالية حسابية بهذا الترتيب إذا علمت أن $p_3 = \frac{1}{7}$:

1) احسب كل من $p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , p_5 , p_6$

2) احسب احتمال ظهور رقم أولي . 3) احسب احتمال ظهور رقم أكبر من 3.

التمرين 3 :

نرمز لوجهي قطعة نقود متوازنة بالرمزين F للوجه ، p للظهر.

نرمي هذه القطعة أربع مرات متتالية.

1- أنشئ مخططا يوضح كل الحالات.

2- احسب احتمال الحادثة B المعرفة بظهور ظهرين و وجهين في أي ترتيب.

3- احسب احتمال الحادثة C المعرفة بظهور وجه واحد في أي ترتيب

التمرين 4 :

يحتوي كيس على 4 كرات مرقمة من 1 إلى 4 لا تفرق بينها عند اللمس . نسحب من الكيس كريتان على التوالي بحيث بعد كل سحبة لكريه نعيدها إلى الكيس قبل السحب الموالي.

1- أنشئ مخططا يبين كل الحالات.

2- احسب الاحتمال لأن تكون الكريه الثانية تحمل الرقم 2 .

التمرين 5 :

يحتوي كيس على 4 كرات مرقمة من 1إلى 4 لا نفرق بينها عند اللمس . نسحب من الكيس كريتان على التوالي دون إرجاع الكرة المسحوبة إلى الكيس بعد كل سحبة .

1- أنشئ مخططا يبين كل الحالات.

2- أحسب الاحتمال لأن تكون الكريه الثانية تحمل الرقم 2

التمرين 6 :

نعتبر المجموعة الشاملة في تجربة عشوائية $\Omega = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$

ونعرف قانون الاحتمال على Ω في الجدول الآتي :

e_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{4}{30}$	α	$\frac{5}{30}$	$\frac{10}{30}$

1- عين العدد الحقيقي α 2 - احسب الأمل الرياضي لهذا القانون

3- احسب التباين لهذا القانون. 4- احسب الانحراف المعياري لهذا القانون

التمرين 7 :

زهرة نرد غير مزيفة أوجهها مرقمة من 1 إلى 6 . نقذف القطعة نحو الأعلى و نراقب الوجه العلوي يظهر عند سقوطها . نفرض أن ظهور رقم أولي يعطي ربح 20 نقطة و أن ظهور الرقم 6 يعطي ربح10 نقط و أن ظهور أي وجه آخر يعطي خسارة 5 نقط . ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ قيم النقط.

- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .
- عين الأمل الرياضي و التباين و الانحراف المعياري

التمرين 8 :

أ) عين الأعداد الطبيعية n بحيث :

1) $C_n^1 + C_n^2 = 10$ 2) $C_{100}^2 > 2C_{100-n}^2$

ب) عين كل الثنائيات (x , y) من $\mathbb{N}^2$ بحيث :

$$\begin{cases} C_{x+y}^{y} = C_{x}^{y-1} \\ C_{x+y}^{2} = 10 \end{cases}$$

التمرين 9 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2 - C_n^p x + C_{n-1}^{p-1} . C_{n-1}^p = 0$

التمرين 10 :

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

$$(2n+1)(2n+3)(2n+5)\ldots(4n-1) = \frac{(4n)! . n!}{2^n \left[(2n)!\right]^2}$$

التمرين 11 :

1) برهن أن : $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$

2) أثبت أن : $p . C_{n+1}^p = (n+1) . C_n^{p-1}$

3) أحسب المجموع :

$$1 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \ldots + \frac{1}{p+1} C_n^p + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n^n$$

التمرين 12 :

1) – في نشر : $(5x+1)^{100}$ ماهو معامل الحد x^{90} .

التمرين 13 :

1) في نشر : $(x+2y)^{50}$ ماهو معامل الحد $x^{30} . y^{20}$.

2) ماهي رتبة الحد $x^{40} . y^{10}$ في نشر $(x+2y)^{50}$

التمرين 14 :

لتكن الأعداد 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، . . . ، 9.

1) كم عددا مكونا من 4 أرقام يمكن تشكيله من هذه الأعداد

2) كم عددا مكونا من 10 أرقام يمكن تشكيله من هذه الأعداد

3) كم عددا مكونا من 4 أرقام (متمايزة مثنى مثنى) يمكن تشكيله من هذه الأعداد

4) كم عددا مكونا من 9 أرقام (متمايزة مثنى مثنى) يمكن تشكيله من هذه الأعداد

5) كم عددا مكونا من 10 أرقام (متمايزة مثنى مثنى) يمكن تشكيله من هذه الأعداد
6) كم مجموعة جزئية يمكن تشكيلها من هذه الأعداد بحيث تشمل كل واحدة منها على 4 عناصر.
7) كم مجموعة جزئية ذات 10 عناصر يمكن تشكيلها من هذه الأعداد

التمرين 15 :

كم عددا يمكن تشكيله باستخدام الأرقام : 0 ، 1 ، 2 ، . . . ، 9
إذا كانت هذه الأعداد مكونة من :
1) 4 أرقام . 2) 4 أرقام متمايزة مثنى مثنى .
3) 4 أرقام و مضاعفة لـ 5 . 4) 3 أرقام متمايزة مثنى مثنى و فردية .

التمرين 16 :

يحتوي كيس على 20 كرة منها 6 بيضاء و 10 حمراء و 4 خضراء. نسحب من الكيس 3 كرات في آن واحد و بلا اختيار ونفرض أن كل السحبات متساوية الاحتمال احسب احتمال سحب :
1) 3 كرات من نفس اللون . 2) 3 كرات مختلفة الألوان .
3) 3 كرات بيضاء . 4) 3 كرات غير حمراء .
5) كرة حمراء على الأقل . 6) كرتين حمراوين على الأكثر .
7) كرة بيضاء واحدة .

التمرين 17 :

يحتوي كيس على 20 كرية مرقمة من 1 إلى 20 نسحب بلا إختيار كرية واحدة من الكيس .
ونعتبر أن جميع السحبات متساوية الاحتمال . p احتمال معرف على التجربة
لتكن A الحادثة : " رقم الكريه المسحوبة هو عدد أولي"
ولتكن B الحادثة : "رقم الكريه المسحوبة من مضاعفات 3"
- احسب الاحتمالات التالية.
1) $p(A)$. 2) $p(B)$. 3) $p_B(A)$. 4) $p_A(B)$.

التمرين 18 :

يحتوي كيس على 15 قريصة مرقمة من 1 إلى 15. نسحب بلا اختيار في آن واحد قريصتين.
1- احسب احتمال سحب قريصتين مجموعهما 15.
2- احسب احتمال سحب قريصتين الفرق بينهما 5 .
3- احسب احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما 15 علما أن فرقهما 5.
4- هل الحادثتين A و B مستقلتين ؟

التمرين 19 :

في تجربة عشوائية A و B حادثتان مستقلتان حيث : $p(A) = 0,6$ و $p(B) = 0,1$ ،
احسب احتمال كل من الحوادث التالية :
1) $A \cap B$. 2) $A \cup B$. 3) $A \cup \bar{B}$.
4) $\bar{A} \cup B$. 5) $\bar{A} \cap \bar{B}$. 6) $\bar{A} \cup \bar{B}$.

التمرين 20 : زهرتي نرد متوازنتين

وملونتين بلونيين مختلفين أوجه كل منهما مرقمة من 1 إلى 6 . نرمي هذين النردين نحو الأعلى و نسجل الرقمين الذان يظهران على الوجهين العلويين عند السقوط. ليكنX المتغير العشوائي الذي يرفق بنتيجة كل رمي:
- العدد 0 إذا كان الرقمان فرديين .- العدد الأكبر المحصل عليه إذا كان الرقمان زوجيين .
- العدد الزوجي المحصل عليه إذا كان أحد الرقمين زوجي و اللآخر فردي .
1) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X . 2) احسب الأمل الرياضي $E(X)$.
3) احسب التباين $V(X)$. 4) احسب الانحراف المعياري .

التمرين 21 :

في مصنع لإنتاج الحواسيب هناك ثلاثة سلاسل للتركيب هي C_1 و C_2 و C_3 حيث تنتج على الترتيب % 50 و % 40 و % 10 من الإنتاج الكلي للمصنع . احتمال أن يكون الحاسوب المركب صالح للاستعمال في كل من السلاسل C_1 و C_2 و C_3 هو 0,9 و 0,8 و 0,7 على الترتيب.ماهو احتمال أن يكون الحاسوب المنتج في المصنع صالح للاستعمال.

التمرين 22 :

يحتوي وعاء على 100 كريه مرقمة من 1 إلى 100 .
أحد اللاعبين يسحب كرة واحدة من الوعاء و يربح كلما تحصل على الرقم 10
1) بين أنها تجربة لبرنولي. 2) أحسب احتمال كل من الربح و الخسارة.
3) ليكن X المتغير العشوائي لبرنولي ، ماهو وسيطها
احسب $E(x)$, $V(x)$, $\sigma(x)$.

التمرين 23 :

لدينا قطعة نقود متوازنة حيث نرمز للوجه بالرمز F و للظهر بالرمز p.
احد اللاعبين يقذف هذه القطعة 10 مرات متتابعة حيث يكون رابحا في حالة ظهورF بـ 0,5 DA
وليكن X المتغير العشوائي الذي يعد عدد النجاحات خلال 10 تجارب.
1) ماهو احتمال أن يربح هذا اللاعب3 DA . 2) مثل بيانيا قانون المتغير العشوائي

التمرين 24 :

يحتوي وعاء على4كرات بيضاء و 5 كرات سوداء لا نفرق بينها عند اللمس
1- نسحب من الكيس 5 كرات على التوالي ودون إعادة
أ) احسب احتمال سحب 4 كرات سوداء و كرة بيضاء بهذا الترتيب
ب) ما احتمال سحب كرة بيضاء واحدة خلال السحبات الأربعة.
2- نسحب الآن من الكيس 5 كرات على التوالي ومع الإعادة.
أجب على السؤالين أ) و ب) في السؤال ① .

التمرين 25 :

يحتوي وعاء على 4 كريات خضراء و 6 كريات حمراء . نسحب من الكيس n كرية على التوالي و مع الإعادة $(n \in N^*)$ نسمي p_n احتمال الحصول على كرة حمراء في آخر سحب من هذه السحبات (n سحب).
1- احسب p_1 , p_2 , p_3 ثم استنتج p_n .
2- احسب المجموع : $S_n = p_1 + p_2 + ... + p_n$ و احسب $\lim_{n \to +\infty} S_n$

التمرين 26 :

في دراسة إحصائية حول منتوج تجاري A تبين أن احتمال أن يختار هذا المنتوج من طرف شخص مختار عشوائيا من عينة لـ 20 شخصا هو 0,3

ليكن X عدد الأشخاص الذين يختارون هذا المنتوج من بين العينة التي تم استجوابها من أجل $k \in \{0 ; 1 ; 2 ; ... ; 20\}$.

1) اكتب قانون الاحتمال $p_k = p(x = k)$ بدلالة k .

2- ما هو احتمال أن يختار 4 أشخاص من هذه العينة هذا المنتوج .

التمرين 27 :

ما هو احتمال الحصول على 3 ذكور في 5 ولادات علما أن احتمال الحصول على ذكر يساوي احتمال الحصول على بنت.

التمرين 28 :

أجرت دراسة إحصائية في 200 قاعة سينما اختيرت عشوائيا حول إقبال الزبائن على هذه القاعات وهل الإقبال يتغير مع الشهور خلال سنة معينة فكانت النسب المئوية للإقبال كما هومبين الجدول الآتي :

الشهور	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
النسب المئوية	9	10	7,5	7,5	7	6	6	5	8	10,5	10,5	13

1- ما هو قانون الاحتمال p الذي تقترحه لنمذجة الفرضية :
"الاقبال على قاعات السينما مستقل عن أشهر السنة"

2- ما هي الطريقة التي تقترحها المحاكاة سلسلة وفق القانون p.

3- لقياس تلاؤم النموذج الاحتمالي p وسلسلة تواترات الإقبال نختار معيار قياس التلاؤم d^2 حيث : $d^2 = \sum_{i=1}^{i=12}(f_i - p_i)^2$ مع : $i \in \{1 ; 2 ; ... ; 12\}$

و f_i هي التواترات المشاهدة عندما يتغير i .

p_i هي الاحتمالات المعطاة في النموذج المفترض أنه يصف السلسلة المشاهدة عندما يتغير i . احسب d^2 .

4- قمنا بمحاكاة التجربة في 500 سلسلة حيث كل سلسلة ذات 200 قيمة تتبع القانون p وإليك التمثيل بعلبة لقيم d_2 في 500 سلسلة .

D_1 Q_1 *Med* Q_3 D_9

$2,3.10^{-3}$ $3,1.10^{-3}$ $4,3.10^{-3}$ $5,6.10^{-3}$ $7,2.10^{-3}$

هل النموذج المختار مقبول بمجازفة قدرها 10 % .

التمرين 29 :

إن الانشطار النووي الإشعاعي مقدرا بالسنوات مرفق بتجربة عشوائية يتبع قانون احتمال أسي وسيطه λ $(\lambda > 0)$. في دراسة تمت على الأنوية تبين أن مدة الحياة لـ 5 % منها أصغر أو تساوي 100 سنة .

1- أحسب الوسيط λ للقانون الأسي .

2- أحسب احتمال أن يتم انشطار نواة في أقل من 150 سنة.

3- أحسب احتمال أن يتم انشطار نواة على الأقل في 150 سنة.

4- أحسب المدة المتوسطة لانشطار النواة.

التمرين 30 :

ليكن X متغير عشوائي يتبع قانون أسي وسيطه λ , $(\lambda > 0)$

1) ليكن x عدد حقيقي موجب . احسب بالتجزئة : $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt$

ثم : $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt$. استنتج الأمل الرياضياتي $E(x)$.

2) ليكن λ عدد حقيقي موجب . احسب بالتجزئة مرتين : $\int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt$

احسب : $\lim_{y \to +\infty} \int_0^y \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt$. استنتج التباين : $V(x)$.

الحلـــــول

التمرين 1 :

1- المجموعة الشاملة : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, ..., 29, 30\}$

2- تعيين الحوادث : $A = \{8, 16, 24\}$; $B = \{6, 12, 18, 24, 30\}$

$C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

$D = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}$

3- تعيين الحوادث :

$A \cap B = \{24\}$

$\bar{C} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30\}$

$\bar{D} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$

$\bar{C} \cap \bar{D} = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$

$C \cap D = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

$$\overline{C\cap D} = \{0\,,1\,,2\,,4\,,6\,,8\,,9\,,10\,,12\,,14\,,15\,,16\,,\ 18\,,20\,,21\,,22\,,24\,,25\,,26\,,27\,,28\,,30\}$$

التمرين 2 : --

1- حساب كل من $p_1\,,p_2\,,p_4\,,p_5\,,p_6$

نفرض r أساس المتتالية الحسابية .

لدينا $p_3 = p_1 + 2r$ ومنه $p_1 = p_3 - 2r$ أي : $p_1 = \frac{1}{7} - 2r$

$p_3 = p_2 + r$ ومنه $p_2 = p_3 - r$ أي $p_2 = \frac{1}{7} - r$

$p_4 = p_3 + r$ ومنه $p_4 = \frac{1}{7} + 2r$

$p_5 = p_3 + 2r$ ومنه $p_5 = \frac{1}{7} + 2r$

$p_6 = p_3 + 3r$ ومنه $p_6 = \frac{1}{7} + 3r$

وبما أن : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$

فإن : $\frac{1}{7} - 2r + \frac{1}{7} - r + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + r + \frac{1}{7} + 2r + \frac{1}{7} + 3r = 1$

ومنه : $\frac{6}{7} + 3r = 1$ وعليه : $3r = \frac{1}{7}$ إذن : $r = \frac{1}{21}$

وعليه : $p_1 = \frac{1}{7} - 2 \cdot \frac{1}{21}$ ومنه : $p_1 = \frac{1}{21}$

$p_2 = \frac{1}{7} - \frac{1}{21}$ ومنه : $p_2 = \frac{2}{21}$

$p_4 = \frac{1}{7} + \frac{1}{21}$ ومنه : $p_4 = \frac{4}{21}$

$p_5 = \frac{1}{7} + \frac{2}{21}$ ومنه : $p_5 = \frac{5}{21}$

$p_6 = \frac{1}{7} + \frac{3}{21}$ ومنه : $p_6 = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ أي : $p_6 = \frac{2}{7}$

2- احتمال ظهور رقم أولي :

أي احتمال ظهور الحادثة : $A = \{2\,,3\,,5\}$

$p(A) = p_2 + p_3 + p_5 = \frac{2}{21} + \frac{1}{7} + \frac{5}{21}$ إذن : $p(A) = \frac{10}{21}$

3- احتمال ظهور رقم أكبر من 3 :

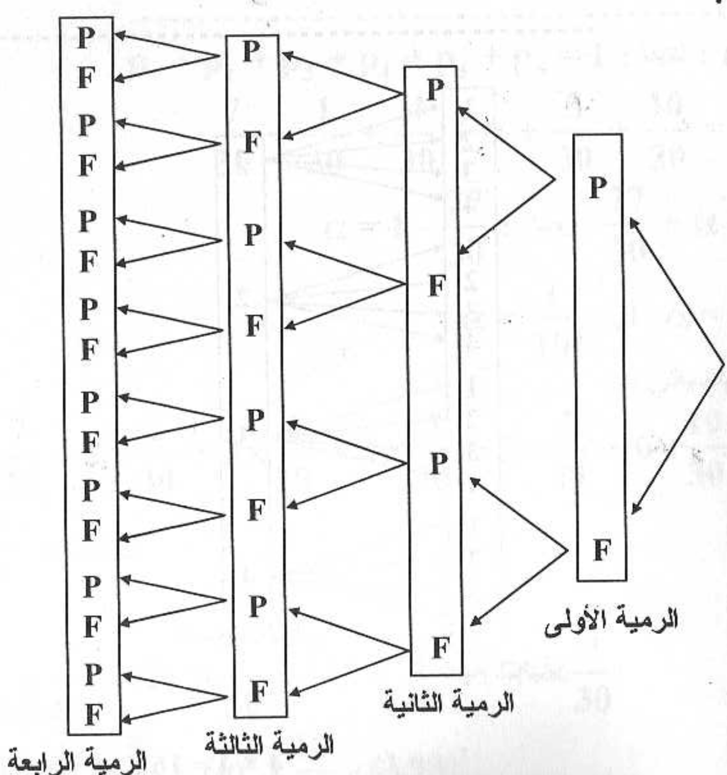
أي احتمال ظهور الحادثة : $B = \{4\,,5\}$

$$p(B) = p_4 + p_5 = \frac{4}{12} + \frac{5}{21} = \frac{9}{21}$$

ومنه الاحتمال : $p(B) = \frac{3}{7}$

التمرين 3 : --

1- المخطط :



2- الاحتمال :

احتمال الحادثة B هو : $p(B) = \dfrac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

عدد الحالات الممكنة هو : 16 .

عدد الحالات الملائمة هو : 6

وهي : FPFF , FFPP , PPFF , PFPF , PFFP , FPPF

وعليه : $p(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

3- احتمال الحادثة C : $p(C) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

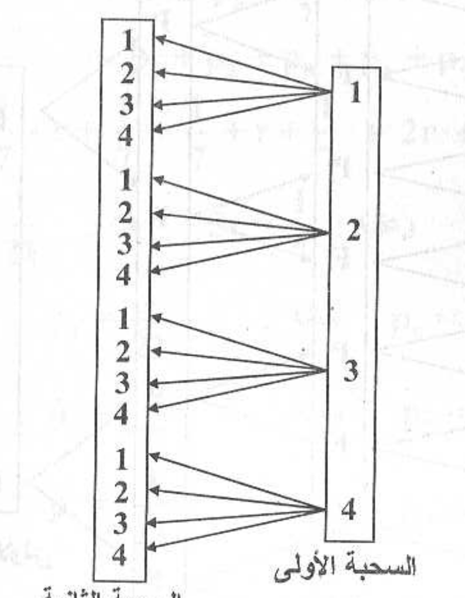
عدد الحالات الممكنة هو : 16

عدد الحالات الملائمة هو : 4 وهي : FPPP , PPPF , PPFP , PFPP

إذن : $p(C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

التمرين 4 :

1- المخطط :



2- حساب الاحتمال :

عدد الحالات الممكنة هو : $4 \times 4 = 16$

عدد الحالات الملائمة : $4 \times 1 = 4$ إذن الاحتمال هو : $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{4}$

التمرين 5 :

1- المخطط :

السحبة الأولى

السحبة الثانية

عدد الحالات الممكنة هو : $4 \times 3 = 12$

عدد الحالات الملائمة : $4 \times 1 = 4$ إذن الاحتمال هو : $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

التمرين 6 :

1- تعيين α : لدينا : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$

وعليه : $\frac{7}{30} + \frac{1}{30} + \frac{4}{30} + \alpha + \frac{5}{30} + \frac{10}{30} = 1$

إذن : $\frac{27}{30} + \alpha = 1$ ومنه : $\alpha = 1 - \frac{27}{30}$

إذن : $\alpha = \frac{3}{30}$ أي $\alpha = \frac{1}{10}$

2- الأمل الرياضياتي :

$$E = 1\times\frac{7}{30} + 2\times\frac{1}{30} + 3\times\frac{4}{30} + 4\times\frac{3}{30} + 5\times\frac{5}{30} + 6\times\frac{10}{30}$$

$$E = \frac{118}{30} \simeq 3,93$$

3- التباين :

$$V = (1)^2\times\frac{7}{30} + (2)^2\times\frac{1}{30} + (3)^2\times\frac{4}{15} + (4)^2\times\frac{3}{30} + (5)^2\times\frac{5}{30} + (6)^2\times\frac{10}{30} - (3,93)^2$$

$$V = \frac{7 + 4 + 9\times4 + 16\times3 + 25\times5 + 36\times10}{30} - \left(\frac{118}{30}\right)^2$$

$$V = \frac{580}{30} - \frac{(118)^2}{(30)^2} = \frac{580\times30 - (118)^2}{(30)^2} = \frac{3476}{900} \simeq 3,86$$

4- الانحراف المعياري : لدينا : $\sigma = \sqrt{V}$ و منه : $\sigma = \sqrt{3,86} \simeq 1,96$

التمرين 7 : --

قيم X هي : 20 ، 10 ، -5

قانون الاحتمال : $p(x = 10) = \frac{1}{6}$ ،

$p(x = 20) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ، $p(x = -5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

X_i	20	10	-5
$p(X = X_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

- الأمل الرياضياتي :

$$E = 20\times\frac{1}{2} + 10\times\frac{1}{6} + (-5)\times\frac{1}{3} = 10 + \frac{5}{3} - \frac{5}{3} = 10$$

- التباين :

$$V = (20)^2\times\frac{1}{2} + (10)^2\times\frac{1}{6} + (-5)^2\times\frac{1}{3} - (10)^2$$

$$V = 200 + \frac{100}{6} + \frac{25}{3} - 100$$

$$V = 100 + \frac{50}{3} + \frac{25}{3} = 100 + \frac{75}{3} = \frac{375}{3} = 125$$

- الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{125} \simeq 11,18$$

التمرين 8 : --

أ) 1) تعيين n بحيث : $C_n^1 + C_n^2 = 10$

- من أجل $n = 0$: $C_0^1 + C_0^2 = 10$ أي $0 = 10$ مستحيلة
- من أجل $n = 1$: $C_1^1 + C_1^2 = 10$ أي $1 = 0$ مستحيلة
- من أجل $n \geq 2$ لدينا : $n + \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = 10$

وعليه : $n + \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\,.\,2!} = 10$ ومنه : $n + \frac{n(n-1)}{2} = 10$

وبالتالي : $\frac{2n + n^2 - n}{2} = 10$ أي : $n^2 + n - 20 = 0$

$\Delta = 81$ ومنه : $n_1 = -5$ (مرفوض) ، $n_2 = 4$ وعليه : $n = 4$.

2) تعيين n بحيث : $C_{1000}^2 > 2\,C_{1000-n}^2$

- من أحل $100 - n < 2$ أي $n > 998$ لدينا : $C_{1000}^2 > 2 \times 0$

أي $C_{1000}^2 > 0$ وهي محققة.

إذن كل الأعداد الطبيعية n حيث $n > 998$ تحقق المتراجحة

- من أجل $100 - n \geq 2$ أي $n \leq 998$ لدينا :

$$\frac{1000!}{(1000-2)!\,.\,2!} > 2\,\frac{(1000-n)!}{(1000-n-2)!\,.\,2!}$$

ومنه :

$$\frac{1000!}{998!\,.\,2!} > 2\,\frac{(1000-n)!}{(1000-n-2)!\,.\,2!}$$

$$\frac{(1000)(999)(998)!}{998!\,.\,2} > \frac{(1000-n)(1000-n-1)(1000-n-2)!}{(1000-n-2)!}$$

$$\frac{(1000)(999)}{2} > (1000-n)(999-n)$$

$$500\,.\,999 > 999000 - 1000n - 999n + n^2$$

$$-n^2 + 1999n - 999000 + 495500 > 0$$

$$-n^2 + 1999n - 499500 > 0$$

$\Delta = (1999)^2 - 4(-1)(-499500)$ ومنه $\Delta = 1998001$

$$n_1 = \frac{-1999 + \sqrt{\Delta}}{-2} \quad , \quad n_2 = \frac{-1999 - \sqrt{\Delta}}{-2}$$

$n_1 \simeq -292,7 \qquad n_2 \simeq 1706,25$

n	$-\infty$		n_1		n_2		$+\infty$
$-n^2 + 1999n - 4995000$		-	0	+	0	-	

ومنه $n \in]n_1 ; n_2[$ لكن $0 \le n \le 998$

ومنه : $n \in [0 ; 998]$ إذن : $n \in \mathbb{N}$ مما سبق

التمرين 9 : --

حل المعادلة : $x^2 - C_n^p x + C_{n-1}^{p-1} . C_{n-1}^p = 0$

$$\Delta = \left(-C_n^p\right)^2 - 4 . 1 . C_{n-1}^{p-1} . C_{n-1}^p$$

$$\Delta = \left(C_n^p\right)^2 - 4\, C_{n-1}^{p-1} . C_{n-1}^p$$

$$\Delta = \left(C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p\right)^2 - 4\, C_{n-1}^{p-1} . C_{n-1}^p$$

$$\Delta = \left(C_{n-1}^{p-1}\right)^2 + 2C_{n-1}^{p-1} . C_{n-1}^p + \left(C_{n-1}^p\right)^2 - 4\, C_{n-1}^{p-1} . C_{n-1}^p$$

$$\Delta = \left(C_{n-1}^{p-1}\right)^2 - 2C_{n-1}^{p-1} . C_{n-1}^p + \left(C_{n-1}^p\right)^2 = \left(C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p\right)^2$$

إذن $\Delta > 0$ ومنه للمعادلة حلين متمايزين.

$$x_1 = \frac{C_n^p - \left(C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p\right)}{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{C_n^p + \left(C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p\right)}{2}$$

وعليه :

$$x_1 = \frac{C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p}{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p}{2}$$

إذن : $x_1 = C_{n-1}^p \quad , \quad x_2 = C_{n-1}^{p-1}$

مجموعة الحلول : $S = \left\{C_{n-1}^{p-1} , C_{n-1}^p\right\}$

التمرين 10 : --

البرهان بالتراجع على صحة الخاصية :

$$p(n) : (2n+1)(2n+3)(2n+5)\dots(4n-1) = \frac{(4n)! . n!}{2^n \left[(2n)!\right]^2}$$

• من أجل $n = 1$: $3 = \frac{4! . 1!}{2 . (2)^2} = \frac{4 \times 3 \times 2}{2 . 4} = 3$

ومنه p (1) صحيحة.

نفرض صحة p (k) ونبرهن صحة p (k + 1)

$$p(k) : (2k+1)(2k+3)(2k+5)\dots(4k-1) = \frac{(4k)! . k!}{2^k \left[(2k)!\right]^2}$$

$$p(k+1) : \underbrace{(2k+3)(2k+5)\dots(4k+3)}_{A} = \overbrace{\frac{(4k+4)!\,(k+1)!}{2^k \left[(2k+2)!\right]^2}}^{B}$$

$$A : (2k+3)(2k+5)\dots(4k+3)$$

$$= \frac{(2k+1) \times (2k+3)(2k+5)\dots(4k-1)(4k+1)(4k+3)}{(2k+1)}$$

$$= (2k+1)(2k+2)\dots(4k-1) . \frac{(4k+1)(4k+3)}{(2k+1)}$$

$$= \frac{(4k)! . k!}{2^k . \left[(2k)!\right]^2} \times \frac{(4k+1)(4k+2)(4k+3) \times (4k+4)(k+1)}{(2k+1) \times (4k+2) \times (4k+4) \times (k+1)}$$

$$A = \frac{(4k+4)(4k+3)(4k+2)(4k+1)(4k)! . (k+1)(k)!}{2^k.(2k)!(2k)!(2k+1)(2k+2).2(2k+1).2(2k+2)(k+1)}$$

$$A = \frac{(4k+4)! . (k+1)!}{2^{k+1} . (2k+2)(2k+1)(2k)! . (2k+2)(2k+1)(2k)!}$$

$$A = \frac{(4k+4)!\,(k+1)!}{2^{k+1}\,(2k+2)! . (2k+2)!}$$

$$A = \frac{(4k+4)!\,(k+1)!}{2^{k+1}\left[(2k+2)!\right]^2} = B$$

ومنه : p (k + 1) صحيحةومنه p (n) صحيحة من أجل كل عدد طبيعيn .

التمرين 11 : --

1) نبرهن أن : $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

لدينا : $(x+y)^n = C_n^0\, x^{n-0}\, y^0 + C_n^1\, x^{n-1}\, y^1 + \dots + C_n^n\, x^{n-n}\, y^n$

بوضع : $x = y = 1$ نجد :

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^1$$

ومنه : $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

2) إثبات أن : $pC_{n+1}^p = (n+1) . C_n^{p+1}$

لدينا : $p . C_{n+1}^p = p . \frac{(n+1)!}{(n+1-p)! . p!}$

ومنه : $p \cdot C_{n+1}^{p} = \dfrac{p \cdot (n+1)!}{[n-(p-1)]! \cdot p\,(p-1)!}$

وعليه : $p \cdot C_{n+1}^{p} = (n+1) \cdot \dfrac{n!}{[n-(p-1)]! \cdot (p-1)!}$

إذن : $p \cdot C_{n+1}^{p} = (n+1) \cdot C_{n}^{p-1}$

3) حساب : $\frac{1}{1} .C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \ldots + \frac{1}{p+1} C_n^p \ldots + \frac{1}{p+1} C_n^n$

لدينا من : $p \cdot C_{n+1}^{p} = (n+1)\, C_n^{p-1}$ وعليه : $\frac{1}{p} .C_n^{p-1} = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{p}$

ومنه لما : $p = 1$: $\frac{1}{1} .C_n^0 = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^1$

لما : $p = 2$: $\frac{1}{2} .C_n^1 = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^2$

لما : $p = 3$: $\frac{1}{3} .C_n^2 = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^3$

⋮

لما : $p = n+1$: $\frac{1}{n+1} .C_n^n = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{n+1}$

بالجمع طرفا لطرف نجد :

$$\frac{1}{1} C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}\right)$$

وعليه :

$$\frac{1}{1} C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{1}{n+1} . \left[2^{n+1} - C_{n+1}^0\right]$$

إذن : $1 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^3 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{1}{n+1} . \left[2^{n+1} - 1\right]$

التمرين 12 :

$$(5x+1)^{100} = \sum_{p=0}^{p=100} C_{100}^p\, (5x)^{100-p} . (1)^p$$

$$(5x+1)^{100} = \sum_{p=0}^{p=100} C_{100}^p\, 5^{100-p} . x^{100-p}$$

وعليه : $100 - p = 90$ ومنه $p = 10$ إذن معامل x^{90} هو : $C_{100}^{10} . 5^{90}$

التمرين 13 :

$$(x+2y)^{50} = \sum_{p=0}^{p=50} C_{50}^p\, x^{50-p} . (2y)^p$$

$$(x+2y)^{50} = \sum_{p=0}^{p=50} C_{50}^p . 2^p . x^{50-p} . y^p$$

1) معامل $x^{30} . y^{20}$: لدينا : $\begin{cases} 50 - p = 30 \\ p = 20 \end{cases}$

ومنه : $p = 20$ إذن معامل $x^{30} . y^{20}$ هو : $C_{50}^2 . 2^{20}$

2) رتبة الحد $x^{40} . y^{10}$: لدينا $p = 10$ وعليه رتبة الحد هي 11.

التمرين 14 :

---

1) عدد الأعداد هو : 9^4 (قوائم). أي 6561 عددا 2) عدد الأعداد هو : 9^{10} (قوائم)

3) عدد الأعداد هو : A_9^4 حيث : $A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!}$ أي $A_9^4 = 3024$

4) عدد الأعداد هو !9 لأن $A_9^9 = 9!$ 5) عدد الأعداد هو 0 لأن $A_9^{10} = 0$

6) عدد المجموعات الجزئية ذات 4 عناصر هو C_9^4 أي 126 مجموعة جزئية

7) عدد المجموعات هو 0 : لأن : $C_9^{10} = 0$.

التمرين 15 :

---

1) عدد الأعداد المكونة من 4 أرقام : وهي من الشكل abcd

لدينا 10 إمكانيات لاختيار رقم الآحاد d.

ومع كل اختيار لرقم الآحاد d لدينا 10 إمكانيات لاختيار رقم العشرات C

ومع كل اختيار لرقم الآحاد و العشرات d و c لدينا 10 إمكانيات لاختيار رقم المئات b.

ومع كل اختيار لرقم الآحاد و العشرات و المئات d و c و b لدينا 9 إمكانيات لاختيار رقم الآلاف a

لأن $a \neq 0$

وعليه عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها هو : $9 \times 10 \times 10 \times 10$

أي 9×10^3 أي 9000 عدد.

2) عدد الأعداد المكونة من 4 أرقام متمايزة مثنى مثنى :

- عدد الأعداد من الشكل abcd هو : $A_{10}^4 = 5040$

(هذه الأعداد يمكن أن تشمل 0 على اليسار أي من الشكل : 0bcd) وهي لا تعد ذات 4 أرقام .

- عدد الأعداد من الشكل 0bcd هو : $A_9^3 = 504$

وعليه عدد الأعداد من الشكل abcd حيث $a \neq 0$ هو : $A_{10}^4 - A_9^3 = 4536$

3) عدد الأعداد المكونة من 4 أرقام و تكون مضاعفة للعدد 5 :

هذه الأعداد من الشكل abc0 أو abc5 حيث $a \neq 0$ أي رقم آحادها 0 أو 5

و عدد كل منها يحسب كمايلي :

لدينا : 2 إمكانيات لاختيار رقم الآحاد (0 أو 5).

ومع كل اختيار لرقم الآحاد لدينا 10 إمكانيات لاختيار رقم العشرات c

ومع كل اختيار لرقمي الآحاد و العشرات لدينا 10 إمكانيات لاختيار رقم المئات b

ومع كل اختيار لأرقام الآحاد و العشرات و المئات لدينا 9 إمكانيات لاختيار رقم الآلاف a لأن $a \neq 0$.

ومنه عدد الأعداد هو : 1800 عدد.

$$9 \times 10 \times 10 \times 2 = 18 \times 10^2 = 1800$$

4- عدد الأعداد المكونة من 3 أرقام متمايزة مثنى مثنى و فرديةهذه الأعداد من الشكل : abc

حيث : $c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ و $a \neq 0$

عدد الأعداد المكونة من 3 أرقام متمايزة مثنى مثنى و فردية (بما فيها التي تشمل 0 على اليسار)

لدينا 5 إمكانيات لاختيار c .

ومع كل اختيار للرقم c لدينا 9 إمكانيات لاختيار b .

ومع كل اختيار للرقم c و الرقم b لدينا 8 إمكانيات لاختيار a .

ومنه عدد الأعداد هو : $5 \times 9 \times 8 = 360$

عدد الأعداد من الشكل 0bc هو :

لدينا 5 إمكانيات لاختيار c

و مع كل اختيار للعدد cلدينا 8 إمكانيات لاختيار b .

ومنه عدد الأعداد هو : $5 \times 8 = 40$.وعليه عدد الأعداد المكونة من 3 أرقام متمايزة مثنى مثنى و فردية هو : $360 - 40 = 320$

التمرين 16 : --

عدد السحبات الممكنة : $C_{20}^3 = 1140$

1) عدد الحالات الملائمة لسحب 3 كرات من نفس اللون : $C_6^3 + C_{10}^3 + C_4^3 = 84$

الاحتمال : $p_1 = \frac{84}{1140}$.

2) عدد الحالات الملائمة لسحب 3 كرات مختلفة اللون.

$C_6^1 + C_{10}^1 + C_4^1 = 240$. الاحتمال : $p_2 = \frac{240}{1140}$

3) عدد الحالات الملائمة لسحب 3 كرات بيضاء : $C_6^3 = 20$

الاحتمال : $p_3 = \frac{20}{1140}$

4- عدد الحالات الملائمة لسحب 3 كرات غير حمراء : $C_{10}^3 = 60$

الاحتمال : $p_4 = \frac{60}{1140}$

5- عدد الحالات الملائمة لسحب كرة حمراء على الأقل :

$$C_{10}^1 \times C_{10}^2 + C_{10}^2 \times C_{10}^1 + C_{10}^3 = 960$$

الاحتمال : $p_5 = \frac{960}{1140}$

6- عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين حمراوين على الأكثر :

$$C_{10}^2 \times C_{10}^1 + C_{10}^1 \times C_{10}^2 + C_{10}^3 = 960$$

الاحتمال : $p_6 = \frac{960}{1140}$

7- عدد الحالات الملائمة لسحب كرة بيضاء واحدة : $C_6^1 \times C_{14}^2 = 546$

الاحتمال : $p_7 = \frac{546}{1140}$

التمرين 17 : --

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

$A \cap B = \{3\}$

1) $p(A) = \frac{C_8^1}{C_{20}^1} = \frac{20}{8} = \frac{4}{5}$. 2) $p(B) = \frac{C_6^1}{C_{20}^1} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

3) $$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{C_1^1}{C_{20}^1}}{\frac{3}{10}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{6}$$

4) $$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{20} \times \frac{5}{4} = \frac{1}{16}$$

التمرين 18 : --

عدد السحبات الممكنة : $C_{15}^2 = 105$

1- لتكن A الحادثة المعرفة بمجموع الرقمين يساوي 15

$A = \{\{1 , 14\},\{2 , 13\},\{3 , 12\},\{4 , 11\},\{5 , 10\},\{6 , 9\},\{7 , 8\}\}$

ومنه عدد الحالات الملائمة هو : 7 إذن : $p(A) = \frac{7}{105} = \frac{1}{15}$

2- لتكن B الحادثة المعرفة بالفرق بين الرقمين يساوي 5.

$$B = \{\{1 , 6\} , \{2 , 7\} , \{3 , 8\} , \{4 , 9\} , \{5 , 10\} , \{6 , 11\} , \{7 , 12\} , \{8 , 13\} , \{9 , 14\} , \{10 , 15\}\}$$

ومنه عدد الحالات الملائمة هو : 10 إذن : $p(B) = \frac{10}{105} = \frac{2}{21}$

3- حساب : $p_B(A)$

$$p_B(A) = \frac{p\,(A \cap B)}{p(B)}$$

لدينا : $A \cap B = \{\{5 , 10\}\}$ ومنه : $p\,(A \cap B) = \frac{1}{105}$

إذن : $p_B(A) = \frac{\frac{1}{105}}{\frac{10}{105}} = \frac{1}{105} \times \frac{105}{10} = \frac{1}{10}$

4- لدينا : $p_B(A) = \frac{1}{10}$ و $p(A) = \frac{1}{15}$

وعليه : $p_B(A) \neq p(A)$ ومنه A و B غير مستقلتين.

التمرين 19 :

بما أن A و B حادثتان مستقلتان فإن :

1) $p(A \cap B) = p(A) . p(B) = 0,6 . 0,1 = 0,06$

ولدينا : 2) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$$p(A \cup B) = 0,6 + 0,1 - 0,06 = 0,64$$

3) $p(A \cup \bar{B}) = p(A) + p(\bar{B}) - p(A \cap \bar{B})$

لدينا: $p(\bar{B}) = 1 - p(B)$ ومنه $p(\bar{B}) = 0,9$ وبما أن A و B مستقلتان

فإن: A و $\bar{B}$ مستقلتان ومنه : $p(A \cap \bar{B}) = p(A) . p(\bar{B}) = 0,6 \times 0,9 = 0,54$

وعليه : $p(A \cup \bar{B}) = 0,6 + 0,9 - 0,54 = 0,96$

إذن : 4) $p(\bar{A} \cup B) = p(\bar{A}) + p(B) - p(\bar{A} \cap B)$

حيث : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ أي أن : $p(\bar{A}) = 0,4$

ومنه $p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A})p(B)$: $p(\bar{A} \cap B) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$

وبالتالي : $p(\bar{A} \cup B) = 0,4 + 0,1 - 0,04 = 0,46$

5) $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) . p(\bar{B}) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$

6) $p(\bar{A} \cup \bar{B}) = p(\bar{A}) + p(\bar{B}) - p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,4 + 0,9 - 0,36 = 0,94$

التمرين 20 :

---

1) عدد عناصر مجموعة الإمكانيات هو: $6 \times 6 = 36$ وهي مبينة في الجدول الآتي:

D_1 \ D_1	1	2	3	4	5	6
1	(1 ، 1)	(1 ، 2)	(1 ، 3)	(1 ، 4)	(1 ، 5)	(1 ، 6)
2	(2 ، 1)	(2 ، 2)	(2 ، 3)	(2 ، 4)	(2 ، 5)	(2 ، 6)
3	(3 ، 1)	(3 ، 2)	(3 ، 3)	(3 ، 4)	(3 ، 5)	(3 ، 6)
4	(4 ، 1)	(4 ، 2)	(4 ، 3)	(4 ، 4)	(4 ، 5)	(4 ، 6)
5	(5 ، 1)	(5 ، 2)	(5 ، 3)	(5 ، 4)	(5 ، 5)	(5 ، 6)
6	(6 ، 1)	(6 ، 2)	(6 ، 3)	(6 ، 4)	(6 ، 5)	(6 ، 6)

2) قيم المتغير العشوائي هي: 6 ، 4 ، 2 ، 0

$$(X = 0) = \{(1 , 1) , (1 , 3) , (1 , 5) , (3 , 1) , (3 , 3) , (3 , 5) , (5 , 1) , (5 , 3) , (5 , 5)\}$$

$$(X = 2) = \{(2 , 2) , (1 , 2), (3 , 2), (5 , 2) , (2 , 1)\ (2 , 3) , (2 , 5)\}$$

$$(X = 4) = \{(2 , 4) , (4 , 2) , (4 , 4)\ (1 , 4) , (4 , 1) , (3 , 4) , (4 , 3) , (4 , 5) , (5 , 4)\}$$

$$(X = 6) = \{(2 , 6) , (6 , 2) , (4 , 6) , (6 , 4) , (6 , 6) , (1 , 6) , (6 , 1) , (3 , 6) , (6 , 3) , (5 , 6) , (6 , 5)\}$$

وعليه :

$$p(X = 0) = \frac{9}{36} \ , \ p(X = 2) = \frac{7}{36}$$

$$p(X = 4) = \frac{9}{36} \ , \ p(X = 6) = \frac{11}{36}$$

قيم X	0	2	4	6
$P(X)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$$E(X) = 0 \times \frac{9}{36} + 2 \times \frac{7}{36} + 4 \times \frac{9}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = \frac{116}{36} = \frac{29}{9} \simeq 3,2$$

3- التباين :

$$V(X) = (0)^2 \times \frac{9}{36} + (2)^2 \times \frac{7}{36} + (4)^2 \times \frac{9}{36} + (6)^2 \times \frac{11}{36} - \left(\frac{29}{9}\right)^2$$

$$= \frac{28 + 144 + 396}{36} - \frac{841}{81} = \frac{437}{81} \simeq 5,4$$

4- الانحراف المعياري : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 2,3$

التمرين 21 : --

الاحتمالات للإختيار العشوائي لحاسوب أنتج في السلاسل C_1 , C_2 , C_3 هي $\frac{50}{100} , \frac{40}{100} , \frac{10}{100}$ على الترتيب أي :

$$p(C_1) = 0,5 \;,\; p(C_2) = 0,4 \;,\; p(C_3) = 0,1$$

الاحتمالات الشرطية لأن يكون الحاسوب صالحا للاستعمال علما أنه أنتج في أحدى السلاسل C_1 , C_2 , C_3 هي $p_{C_1}(A)$ و $p_{C_2}(A)$ و $p_{C_3}(A)$ على الترتيب

حيث : $p_{C_1}(A) = 0,9$ و $p_{C_2}(A) = 0,8$ و $p_{C_3}(A) = 0,7$

وحسب دستور الاحتمالات الكلية :

$$p(A) = p_{C_1}(A) \,.\, p(C_1) + p_{C_2}(A) \times p(C_2) + p_{C_3}(A) \times p(C_3)$$

$$p(A) = 0,9 \times 0,5 + 0,8 \times 0,4 + 0,7 \times 0,1 = 0,84$$

التمرين 22 : --

1) بما أن في هذه التجربة ربح في حالة سحب الرقم 10 وخسارة في حالة سحب أي رقم آخر فان التجربة تشمل على ربح أو خسارة و بالتالي فهي تجربة لبرنولي.

2) احتمال الربح : $p = \frac{1}{100} = 0,01$

احتمال الخسارة : $1 - p = 1 - 0,01 = 0,99$

3) وسيط المتغير العشوائي X لبرنولي هو 0,01

ويكون قانونه كمايلي

X_i	1	0
$p_X(x_i)$	0,01	0,99

$$E(X) = 1 \times 0,01 + 0 \times 0,99 = 0,01 = p$$

$$V(X) = p(1 - p) = 0,01 \times 0,99 = 0,0099$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 0,099$$

التمرين 23 : --

احتمال ظهور كل من الوجه F و الظهر p هو 0,5 وعليه فالتجربة العشوائية X تتبع قانون ثنائي الحد للوسيطين 0,5 و 10. ومنه قانون الاحتمال يعطى بالعبارة :

$$p_X(k) = C_{10}^{k}\ (0,5)^k\ (0,5)^{10-k} = C_{10}^{k}\ .\ (0,5)^{10}$$

1) حساب إحتمال أن يربح هذا اللاعب 3DA :

حتى يربح هذا اللاعب 3DA يجب أن يظهر F 6 مرات ومنه الاحتمال هو $6 \times p$ حيث

$$p_X(6) = C_{10}^{6}\ (0,5)^{10} = \frac{10!}{4! \times 6!} \times (0,5)^{10} = 0,2 :$$

2- التمثيل البياني لقانون المتغير العشوائي: قيم المتغير العشوائي هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 أي عدد الحالات التي تظهر فيها F خلال 10 رميات ومنه :

$$.\ p_X(1) = C_{10}^{1}\ (0,5)^{10} \simeq 0,0097$$

$$p_X(0) = C_{10}^{0}\ (0,5)^{10} \simeq 0,00097$$

$p_X(2) = C_{10}^{2}\ (0,5)^{10} \simeq 0,044$. $p_X(3) = C_{10}^{3}\ (0,5)^{10} \simeq 0,117$

$p_X(4) = C_{10}^{4}\ (0,5)^{10} \simeq 0,21$. $p_X(5) = C_{10}^{5}\ (0,5)^{10} \simeq 0,25$

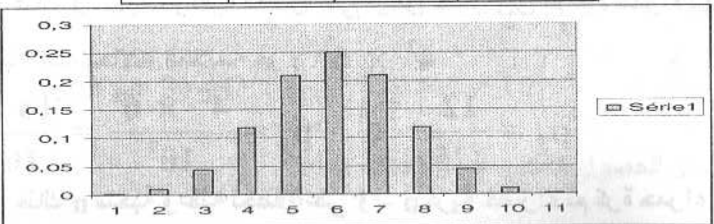
$p_X(6) = C_{10}^{6}\ (0,5)^{10} \simeq 0,2$. $p_X(7) = C_{10}^{7}\ (0,5)^{10} \simeq 0,117$

$p_X(8) = C_{10}^{8}\ (0,5)^{10} \simeq 0,044$. $p_X(9) = C_{10}^{9}\ (0,5)^{10} \simeq 0,0097$

$p_X(10) = C_{10}^{10}\ (0,5)^{10} \simeq 0,00097$

X_i	0	1	2	3	4	5	6
$p_X(x_i)$	0,00097	0,0097	0,044	0,117	0,21	0,25	0,2

7	8	9	10
0,117	0,044	0,0097	0,00097



التمرين 24 : --

1) عدد السحبات الممكنة : $A_{10}^{5} = 30240$

أ) عدد السحبات الملائمة : $A_6^4 \times A_4^1 = 1440$

الاحتمال : $p_1 = \frac{A_6^4 \times A_4^1}{A_{10}^5}$ أي : $p_1 = \frac{1440}{30240} \simeq 0,048$

ب) عدد الحالات الملائمة هو : $C_4^1 \times \left(A_4^1 \times A_6^4\right)$

الاحتمال $p_2 = \frac{4 . A_4^1 \times A_6^4}{A_{10}^5}$ أي $p_2 = \frac{5760}{30240} \simeq 0,19$

2) عدد السحبات الممكنة : $10^5 = 100000$

أ) عدد السحبات الملائمة : $6^4 \times 4^1 = 5184$

الاحتمال : $p_3 = \frac{6^4 \times 4^1}{10^5}$ أي $p_3 = \frac{5184}{100000} \simeq 0,052$

ب) عدد الحالات الملائمة هو : $C_4^1 \times 6^4 \times 4^1$

الاحتمال : $p_4 = \frac{4 . 6^4 \times 4^1}{10^5}$ أي $p_4 = \frac{20736}{100000} \simeq 0,207$

التمرين 25 :

عدد السحبات الممكنة هو "10" عند سحب n كرة

1) حساب p_1 : هناك سحبة واحدة أي نحصل على كرة حمراء . ومنه عدد السحبات الملائمة هو 6^1 . إذن : $p_1 = \frac{6^1}{10^1} = \frac{3}{5}$

حساب p_2 : هناك سحبتين و عليه نحصل على كرة خضراء ثم كرة حمراء بهذا الترتيب . وعليه عدد الحالات الملائمة هو : $4^1 \times 6^1$

إذن : $p_2 = \frac{4^1 \times 6^1}{10^2} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$

حساب p_3 : هناك 3 سحبات وعليه نحصل على كرتين خضراوين ثم كرة حمراء بهذا الترتيب.وعليه عدد الحالات الملائمة هو : $4^2 \times 6^1$

ومنه : $p_3 = \frac{4^2 \times 6^1}{10^2} = \frac{16 . 6}{10^3}$ أي $p_3 = \frac{12}{125}$

حساب p_n : هناك n سحبة وعليه نحصل على n − 1 كرية خضراء ثم كرة حمراء بهذا الترتيب . وعليه عدد السحبات الملائمة هو : $4^{n-1} \times 6^1$

وبالتالي : $p_n = \frac{4^{n-1} \times 6^1}{\dots}$ أي $p_n = \frac{4^{n-1}}{\dots} \times \frac{6}{\dots}$

ومنه : $p_n = \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} \times \frac{3}{5}$ أي $p_n = \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

2- حساب S_n : p_n هو الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول $p_1 = \frac{3}{5}$ وأساسها $q = \frac{2}{5}$. وعليه :

$$S_n = p_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{3}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{3}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{3}{5}} = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n = 1$$

التمرين 26 :

حساب p_k : بما أن احتمال أن يختار أحد الأشخاص من العينة المستجوبة المنتوج A هو : p = 0,3 فإن احتمال أن لا يختار المنتوج هو : q = 1 - p = 0,7 وعليه هذه التجربة هي لبرنولي وهي مكررة 20 مرة.

وعليه قانون الاحتمال p_X هو قانون ثنائي الحد للوسيطين 20 و 0,3

ومنه احتمال أن نحصل على k شخص من العينة يختار المنتوج هو : $p_k = C_{20}^k (0,3)^k . (0,7)^{20-k}$ مع $k \in \{0 , 1 , 2 , . . . , 20\}$

2) احتمال أن يختار 4 أشخاص هذا المنتوج هو : $p_4 = C_{20}^4 (0,3)^4 . (0,7)^{20-4}$

$$p_4 = \frac{20!}{16!\ 4!} (0,3)^4 \times (0,7)^{16} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2 \times 1} (0,3)^4 \ (0,7)^{16}$$

$$p_4 = 5 \times 19 \times 3 \times 7 \ (0,3)^4 \ (0,7)^{16} \simeq 0,537$$

التمرين 27 :

هي تجربة لبرنولي لأن : $p(G) = p(F) = \frac{1}{2}$

وعليه : $p(X = 3) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16}$

أي أن احتمال الحصول 3 ذكور في 5 ولادات هو $\frac{5}{16}$

التمرين 28 :

أي : $p_1 = p_2 = \ldots = \frac{1}{p_{12}} = \frac{1}{12}$

2) محاكاة السلسلة هو محاكاة أعداد من المجموعة $\{1,2,\ldots,12\}$ إما بآلة بيانية أو بمجدول . فنحصل على أعداد عشوائية محصورة بين 1 و 12.

3) حساب d^2 :
$$d^2 = \sum_{i-1}^{12} (f_i - p_i)^2$$

لدينا : $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p_{12} = 0,083$

$$f_1 = \frac{9}{100} = 0,09 \ , \ f_2 = \frac{10}{100} = 0,1 \ , \ f_3 = \frac{7,5}{100} = 0,075$$

$$f_4 = \frac{7,5}{100} = 0,075 \ , \ f_5 = \frac{7}{100} = 0,07 \ , \ f_6 = \frac{6}{100} = 0,06$$

$$f_7 = \frac{6}{100} = 0,06 \ , \ f_8 = \frac{5}{100} = 0,05 \ , \ f_9 = \frac{8}{100} = 0,08$$

$$f_{10} = \frac{10,5}{100} = 0,105 \ , \ f_{11} = \frac{10,5}{100} = 0,105 \ , \ f_{12} = \frac{13}{100} = 0,13$$

$$d^2 = (0,09 - 0,083)^2 + (0,1 - 0,083)^2 + (0,075 - 0,083)^2$$
$$+(0,075- 0,083)^2+(0,07- 0,083)^2+(0,06- 0,083)^2+(0,05- 0,083)^2$$
$$+(0,08- 0,083)^2+(0,105- 0,083)^2+(0,105- 0,083)^2+(0,13- 0,083)^2$$

$$d^2 = 5968 \ . \ 10^{-6} \simeq 0,005968$$

4) نعم النموذج مقبول. أي أن : " الإقبال على السينما مستقل عن شهر خلال سنة" قاعدة صحيحة.

لأن $d_2 \le D_9$ لأن $D_9 = 0,0072$

حيث D_9 هو العشير التاسع الموضح في التمثيل بالعلبة.

التمرين 29 : --

1) ليكن X المتغير العشوائي المرفق بتجربة مدة انشطار النواة

ولدينا : $p([0\,;100]) = 0,05$ لكن : $p([0\,;100]) = \int_0^{100} \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt$

ومنه : $p([0\,;100]) = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{100} = 1 - e^{-100\lambda}$

إذن : $1 - e^{-100\lambda} = 0,05$ أي : $e^{-100\lambda} = 0,95$

إذن : $\ln e^{-100\lambda} = \ln 0,95$ وعليه : $-100\lambda = \ln 0,95$

إذن : $\lambda = \frac{\ln 0,95}{-100}$ وعليه : $\lambda \simeq 0,0005$

إذن دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X هي الدالة f حيث : $f(t) = 0,0005\, e^{-0,0005\, t}$

2) احتمال أن يتم الانشطار في أقل من 150 سنة :

$$p([0\,;150]) = \int_0^{150} 0,0005 \ . \ e^{-0,0005t}\, dt = \left[1 - e^{-0,0005\times150}\right] \simeq 0,072$$

3- احتمال أن يكون الانشطار على الأقل في 150 سنة :

الحادثة أن يكون الانشطار على الأقل في 150 سنة هي الحادثة العكسية للحادثة أن يتم الانشطار في أقل من 150 سنة.

إذن : $p([150\,;+\infty[) = 1 - p([0\,;150]) = 1 - 0,072 \simeq 0,928$

4- المدة المتوسطة للانشطار النووي :

لدينا : $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,0005}$ وعليه : $E(X) \simeq 2000$

إذن المدة المتوسطة للانشطار النووي هي 2000 سنة .

التمرين 30 : --

1- حساب $\int_0^x \lambda t\, e^{-\lambda t}\, dt$

لدينا: $\int_a^b f'(t) \ . \ g(t)\, dt = \left[f(t) \ . \ g(t)\right]_a^b - \int_a^b g(t) \ . \ f'(t)\, dt$

بوضع : $f'(t) = \lambda t\, e^{-\lambda t}$ و $g(t) = t$

نجد : $f(t) = -e^{-\lambda t}$ و $g'(t) = 1$

$$\int_0^x \lambda t\, e^{-\lambda t}\, dt = \left[-t\, e^{-\lambda t}\right]_0^x - \int_0^x -e^{-\lambda t}\, dt = \left[-t\, e^{-\lambda t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= \left[-t\, e^{-\lambda t}\right]_0^x + \left[-\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda t}\right]_0^x = \left[e^{-\lambda t}\left(-t - \frac{1}{\lambda}\right)\right]_0^x$$

$$\int_0^x \lambda t\, e^{-\lambda t}\, dt = e^{-\lambda x}\left(-x-\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}(-\lambda x-1)\, e^{-\lambda x}+\frac{1}{\lambda}$$

حساب النهاية :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda t\, e^{-\lambda t}\, dt = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\lambda}(-\lambda x-1)\, e^{-\lambda x}+\frac{1}{\lambda}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\lambda}(-\lambda x\,.\, e^{-\lambda}-e^{-\lambda x})+\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}$$

- استنتاج $E(X)$: لتكن الدالة f : $f(t)=\lambda\, e^{-\lambda t}$

* الدالة f مستمرة على $[0\,;+\infty[$ * الدالة f موجبة على $[0\,;+\infty[$

ولدينا : $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\, dt = \lim_{x\to+\infty}\left[1-e^{-\lambda t}\right]=1$

وعليه الدالة f هي دالة كثافة الاحتمال p_X المعرف على المتغير العشوائي X

ومنه : $E(X)=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\, dt=\frac{1}{\lambda}$

2- حساب $\int_0^x \lambda t^2\, e^{-\lambda t}\, dt$

لدينا : $\int_a^b f'(t)\,.\,g(t)\, dt = [f(t)\,.\,g(t)]_a^b - \int_a^b g'(t)\,.\,f(t)\, dt$

بوضع : $g(t)=t^2$ و $f'(t)=\lambda\, e^{-\lambda t}$

نجد : $g'(t)=2t$ و $f(t)=-e^{-\lambda t}$

إذن : $\int_0^y \lambda t^2\, e^{-\lambda t}\, dt=\left[-t^2\, e^{-\lambda t}\right]_0^y-\int_0^y -2t\, e^{-\lambda t}\, dt=-y^2\, e^{-\lambda y}+2\int_0^y t\, e^{-\lambda t}\, dt$

• حساب التكامل : $\int_0^y t\, e^{-\lambda t}\, dt$

لدينا : $\int_a^b f'(t)\,.\,g(t)\, dt = [f(t)\,.\,g(t)]_a^b - \int_a^b g'(t)\,.\,f(t)\, dt$

بوضع : $g(t)=t$ و $f'(t)=e^{-\lambda t}$

نجد : $g'(t)=1$ و $f(t)=-\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda t}$

ومنه : $\int_0^y t\, e^{-\lambda t}\, dt=\left[-\frac{1}{\lambda}\, t\, e^{-\lambda t}\right]_0^y+\frac{1}{\lambda}\int_0^y e^{-\lambda t}\, dt$

$$=\left[-\frac{1}{\lambda}\, t\, e^{-\lambda t}\right]_0^y+\frac{1}{\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda t}\right]_0^y=\left[\left(-\frac{1}{\lambda}\, t-\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda t}\right]_0^y$$

$$=\left(-\frac{1}{\lambda}\, y-\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda y}+\frac{1}{\lambda^2}$$

إذن : $\int_0^y t^2\, e^{-\lambda t}\, dt=-y^2\, e^{-\lambda y}+2\left(-\frac{1}{\lambda}y-\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda y}+\frac{2}{\lambda^2}$

$$=\frac{2}{\lambda^2}\left(-\lambda^2 y^2\, e^{-\lambda y}-2\lambda y\, e^{-\lambda y}-2e^{-\lambda y}\right)+\frac{2}{\lambda^2}$$

وعليه : $\lim_{y\to+\infty}\int_0^y \lambda t^2\, e^{-\lambda t}\, dt=\frac{2}{\lambda^2}$

استنتاج $V(X)$: لدينا : $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$

11 – الأعداد المركبة

1 – تعريف مجموعة الأعداد المركبة :

المستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

– كل نقطة M من المستوي تمثل عدد مركب وعدد مركب وحيد. وكل عدد مركب يمثل بنقطة و بنقطة وحيدة في المستوي.– النقطة $J(o ; 1)$ تمثل العدد المركب الذي نرمز له بالرمز i .

– من أجل كل عددان حقيقيان x و y ، يرمز للعدد المركب الممثل بالنقطة $M(x ; y)$ بالرمز $x + iy$ و يرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$.

2– الشكل الجبري لعدد مركب :

من أجل كل عددان حقيقيان x و y:الشكل $x + iy$ يسمى الشكل الجبري لعدد مركب Z

3– تعار يف و مصطلحات :

ليكن $Z = x + iy$ عدد مركب ، x و y عددان حقيقيان

– العدد الحقيقي x يسمى الجزء أو القسم الحقيقي للعدد المركب Z و نرمز له بالرمز $Re(Z)$ أي : $Re(Z) = x$

– العدد الحقيقي y يسمى الجزء أو القسم التخيلي للعدد المركب Z ويرمز له بالرمز $Im(Z)$ أي : $Im(Z) = y$.

– النقطة $M(x ; y)$ تسمى صورة العدد المركب Z و العدد Z يسمى لاحقة M

– من أجل كل عدد حقيقي x, y, x', y' فإن العدد $x + iy$ يساوي العدد $x' + iy'$ إذا وفقط إذا كان : $x = x'$ و $y = y'$.

– كل عدد حقيقي هو عدد مركب و لدينا : $Z \in \mathbb{R}$ يكافئ: $Im(Z) = 0$.

– يكون العدد المركب Z تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان: $Re(Z) = 0$

– محور الفواصل يدعى المحور الحقيقي و محور التراتيب يدعىالمحور التخيلي .

– إذا كان $Z = 0$ فإن Z حقيقي و تخيلي صرف في آن واحد و يمثل بالنقطة O

4– الحساب في $\mathbb{C}$:

– المجموع و الجداء في $\mathbb{C}$: المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعمليتين هما الجمع + و الضرب ×معرفتان من أجل كل عددان مركبان Z و Z′ حيث: $Z = x + iy$ و $Z' = x' + iy'$

$$Z + Z' = (x + x') + i\,(y + y')$$

$$Z \times Z' = (xx' - yy') + i\,(xy' + x'y)$$

هاتين العمليتين لهما نفس خواص الجمع + و الضرب × في $\mathbb{R}$

– قوى عدد مركب : القوى الصحيحة لعدد مركب لها نفس خواص القوى الصحيحة لعدد حقيقي ولدينا : $i^2 = (0 + 1 . i) \times (0 + 1 . i)$

منه $i^2 = (0 - 1) + i\,(0 . 1 + 0 . 1) = -1$ وعليه $i^2 = -1$:

خواص :

إذا كان Z و Z′ لاحقتي النقطتين M و M′ (أو الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$) على الترتيب فإن :

• $Z + Z'$ هو لاحقة النقطة S (أو الشعاع $\overrightarrow{OS}$) حيث:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$$

• $Z - Z'$ هو لاحقة النقطة D (أو الشعاع $\overrightarrow{OD}$) حيث:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM''}$$

M′
S
M
O
M″
D

وعليه إذا كانت A و B نقطتان لاحقتاهما Z_A و Z_B على الترتيب فإن لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو العدد المركب $Z_{\overrightarrow{AB}}$ حيث : $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$

ولاحقة النقطة I منتصف $[AB]$ هو Z_I حيث $Z_I = \dfrac{Z_A + Z_B}{2}$

– مقلوب عدد مركب :

Z عدد مركب غير معدوم . حيث $Z = x + iy$.

لدينا : $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{x + iy} = \dfrac{(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$

و منه : $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - i\,\dfrac{y}{x^2 + y^2}$وهو الشكل الجبري لمقلوب العدد المركب Z غير المعدوم.

– حاصل قسمة عددين مركبين :

Z و Z′ عددان مركبان حيث: $Z' \neq 0$ مع $Z = x + iy$ و $Z' = x' + iy'$

$$\frac{Z}{Z'} = Z \times \frac{1}{Z'} = (x + iy) \times \left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2} - i\,\frac{y'}{x'^2 + y'^2}\right)$$

$$= \frac{xx'}{x'^2+y'^2} - i\,\frac{xy'}{x'^2+y'^2} + i\,\frac{x'y}{x'^2+y'^2} + \frac{yy'}{x'^2+y'^2}$$

ومنه : $\frac{Z}{Z'} = \frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2} + i\,\frac{x'y-xy'}{x'^2+y'^2}$ وهو الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{Z}{Z'}$

5- مرافق عدد مركب :

تعريف :

لكل نقطة M من المستوى ذات اللاحقة $Z = x + iy$ حيث x وy عددان حقيقيان نظيرة بالنسبة لمحور الفواصل هي النقطة M' ذات اللاحقة $x - iy$. العدد المركب $x - iy$ يسمى مرافق العدد المركب $x + iy$ ونرمز له بالرمز $\bar{Z}$ أي : $\bar{Z} = x - iy$

خواص :

a) x و y عددان حقيقيان . $Z = x + iy$ عدد مركب . $\bar{Z} = x - iy$ مرافق العدد المركب Z .

1) $\bar{\bar{Z}} = Z$ 2) لدينا : $Z + \bar{Z} = 2x$ ومنه : $Z + \bar{Z} = 2\,Re(Z)$

3) $Z - \bar{Z} = 2iy$ ومنه : $Z - \bar{Z} = 2\,Im(Z)$ 4) $Z \cdot \bar{Z} = x^2 + y^2$

5) $Z \in \mathbb{R}$ تكافئ $Z = \bar{Z}$ 6) Z تخيلي صرف يكافئ : $Z = -\bar{Z}$

b) x, x', y, y' أعداد حقيقية . Z_1, Z_2 عددان مركبان حيث :

$Z_1 = x + iy$ ؛ $Z_2 = x' + iy'$

1) $\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$ 2) $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2$

3) $\overline{\left(\frac{1}{Z_1}\right)} = \frac{1}{\bar{Z}_1}$ 4) $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$

5) من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{Z_1^n} = (\bar{Z}_1)^n$

وإذا كان: $Z_1 \neq 0$ و $n \in \mathbb{N}$: $\overline{Z_1^n} = (\bar{Z}_1)^n$

6- طويلة و عمدة عدد مركب :

المستوى منسوب في ما يلي إلى معلم متعامد و متجانس و مباشر $(O;\vec{i},\vec{j})$. M نقطة من المستوي إحداثياها القطبيان $[\rho;\theta]$ حيث ρ عدد حقيقي موجب و θ عدد حقيقي

عليه Z لاحقة النقطة M يكتب على الشكل : $\rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

• $\rho.(\cos\theta + i\sin\theta)$ يسمى الشكل المثلثي للعدد Z

• نصف القطر القطبي OM يحقق $OM = \rho$ ويسمى طويلة Z ونرمز له بالرمز $|Z|$.

• الزاوية القطبية $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$ تحقق $(\vec{i};\overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و تسمى عمدة العدد المركب Z. ونرمز لها بالرمز arg (Z) ونكتب: $\arg(Z) = \theta[2\pi]$ و تقرأ θ بترديد 2π

ملاحظات :

لدينا : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ وعليه : $|Z| = \|\overrightarrow{OM}\| = \rho$

وعليه :
$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

وإذا كان $Z = 0$ فإن : $\rho = 0$ لكن Z ليس له عمدة.

خواص :

A) Z عدد مركب غير معدوم.

1) Z حقيقي موجب يكافئ: $\arg(Z) = 0 + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

2) Z حقيقي سالب يكافئ: $\arg(Z) = \pi + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

3) $Im(Z) > 0$ و $Re(Z) = 0$ يكافئ: $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

4) $Im(Z) < 0$ و $Re(Z) = 0$ يكافئ: $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

B) مرافق عدد مركب :

لتكن M, M' صورتي Z و $\bar{Z}$ على الترتيب . لدينا M و M' متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل و عليه : $|\bar{Z}| = |Z|$ و

$$\arg(\bar{Z}) = -\arg(Z) + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

C) جداء عددان مركبان :

Z , Z' عددان مركبان غير معدومين حيث :

$Z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ و $Z' = \rho'\,(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$|Z . Z'| = |Z| . |Z'|$: إذن. $ZZ' = \rho\rho' [\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]$

$$\arg(Z.Z') = \arg(Z)+\arg(Z')+2k\pi \ ; \ k\in\mathbb{Z}$$

D) مقلوب عدد مركب غير معدوم :

نعتبر العدد المركب غير المعدوم : $Z=\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

إذن : $\frac{1}{Z} = \frac{1}{\rho}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$

وعليه : $\arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -\arg(Z)+2k\pi$ و $\left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|}$

E) حاصل قسمة عددين مركبين :

Z و Z' عددان مركبان حيث $Z'\neq 0$

$$\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|} \text{ و } \arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z)-\arg(Z')$$

F) تساوي عددين مركبين :

Z و Z' عددان مركبان غير معدومين حيث :

$Z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ و $Z'=\rho'(\cos\theta'+i\sin\theta')$

$Z = Z'$ يكافئ : $\rho=\rho'$ و $\theta=\theta'+2k\pi \ ; \ k\in\mathbb{Z}$

G) طويلة و عمدة Z^n :

Z عدد مركب غير معدوم ، n عدد صحيح.

• لدينا $|Z^n| = |Z|^n$ و $\arg(Z^n) = n.\arg(Z)$

نتيجة :

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n = \cos\theta + i\sin\theta$ من أجل $n\in\mathbb{Z} \ ; \ \theta\in\mathbb{R}$.

وهو ما يعرف بدستور موافر .

H) إذا كانت A و B و C ثلاث نقط متمايزة من المستوي لواحقها Z_A و Z_B و Z_B على الترتيب فإن :

• $\left|\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right| = \frac{AC}{AB}$ • $\arg\left(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \ [2\pi]$

I) إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان لاحقتيهما Z و Z' على الترتيب فإن:

$$(\vec{u},\vec{v}) = \arg\left(\frac{Z'}{Z}\right) [2\pi]$$

7- الشكل الأسي لعدد مركب (ترميز أولير)

- التعريف :

نضع اصطلاحا من أجل كل عدد حقيقي θ : $\cos\theta+i\sin\theta = e^{i\theta}$

فإذا كانZعدد مركب غير معدوم حيث: $Z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ فإن: $Z=\rho . e^{i\theta}$

- خواص :

ليكن Z_1 , Z_2 عددان مركبان حيث : $Z_2=\rho_1 e^{i\theta_1}$, $Z_2=\rho_2 e^{i\theta_2}$

1) $Z_1 . Z_2 = \rho_1 . \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ 2) $\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{\rho_1} . e^{-i\theta_1}$ 3) $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} . e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

4) $Z_1^n = \rho_1^n . e^{in\theta}$ 5) $\bar{Z}_1 = \rho_1 . e^{-i\theta_1}$

ملاحظة :

لدينا : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \ ; \ e^{i\theta'} = \cos\theta' + i\sin\theta'$ وعليه :

$$e^{i\theta} . e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \ldots(1)$$

ولدينا :

$$e^{i\theta} . e^{2\theta'} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

$$= \cos\theta.\cos\theta' - \sin\theta.\sin\theta' + i(\cos\theta.\sin\theta' + \sin\theta.\cos\theta') \ldots(2)$$

من (1) ; (2)

$\sin(\theta+\theta') = \cos\theta . \sin\theta' + \sin\theta . \cos\theta'$ و

$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta . \cos\theta' - \sin\theta . \sin\theta'$

- التعبير عن دائرة بالعلاقة $Z = Z_0 + k . e^{i\theta}$

لتكن(C) دائرة مركزها ω ونصف قطرها k. نفرض Z_0 لاحقة ω ، k عدد حقيقي موجب تماما . من أجل كل نقطة M ذات اللاحقة Z من (C) لدينا : $M \in (C)$ تكافئ : $\|Z - Z_0\| = k$

و تكافئ $Z - Z_0$ هو عدد مركب غير معدوم طويلته k و تكافئ : يوجد عدد حقيقي θ (يمكن القول أن $\theta \in [0 ; 2\pi[$) بحيث : $Z = Z_0 + k . e^{i\theta}$.

- التعبير عن نصف مستقيم بالعلاقة $Z = Z_0 + k . e^{i\theta}$

ليكن (ωx) نصف مستقيم مبدأه ω و شعاع توجيهه $\vec{v}$ معطى . نفرض Z_0 لاحقة ω ، W لاحقة $\vec{v}$ ، $(u \in \mathbb{C}^*)$:حيث $\arg(u) = \theta \ [2\pi]$

7) طويلة و عمدة العدد المركب $\sin\theta + i\,cos\theta$ هما 1 و $\theta - \frac{\pi}{2}$ على الترتيب . ☐

8) إذا كانت عمدة Z هي $\frac{\pi}{4}$ فإن عمدة (-Z) هي $\frac{-\pi}{4}$. ☐

9) إذا كانت عمدة Z هي $\frac{\pi}{4}$ فإن عمدة Z- هي $\pi + \frac{\pi}{4}$ أي $\frac{5\pi}{4}$. ☐

10) طويلة العدد المركب : $\left(2 - 2\sqrt{2}\right) e^{i\frac{\pi}{6}}$ هي $2 - 2\sqrt{2}$ وعمدته $\frac{\pi}{6}$. ☐

11) طويلة العدد المركب : $\left(1 - \sqrt{3}\right) e^{i\frac{\pi}{3}}$ هي $-\left(1 - \sqrt{3}\right)$ وعمدته $\pi + \frac{\pi}{3}$ ☐

12) إذا كان $\frac{Z}{\overline{Z}}$ حقيقي و $Z \neq 0$ فإن $Z = \overline{Z}$ أو $Z = -\overline{Z}$ ☐

13) مرافق العدد المركب : $\frac{Z}{Z - 1}$ هو $\frac{Z}{\overline{Z} + 1}$ ☐

14) مرافق العدد المركب : $\frac{Z}{Z + i}$ هو $\frac{Z}{\overline{Z} - i}$ ☐

15) مرافق العدد المركب : $\frac{4Z}{Z - 2}$ هو $\frac{4\overline{Z}}{\overline{Z} - 2}$ ☐

16) تكون طويل العدد المركب Z مساوية إلى 1 إذا وفقط إذا كان $\frac{1}{Z} = \overline{z}$ ☐

17) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث $\left|\frac{Z - 1 - i}{Z - 3}\right| = 1$ هي المستقيم (Δ) محور $[AB]$ حيث $A(1 ; 1)$ و $B(3 ; 0)$ ☐

18) إذا كانت : $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{3}$ فإن : $\arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right) = \frac{\pi}{3}$ ☐

19) إذا كانت : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$ فإن : $\arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ☐

20) كل معادلة من الدرجة الثانيةو بمعاملات حقيقية و مميزها سالب تقبل حلين مترافقين ☐

21) كل معادلة من الدرجة الثانية و بمعاملات حقيقية تقبل حلين مترافقين. ☐

22) إذا كان f تحويلا نقطيا يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M′ ذات اللاحقة Z′ حيث : $Z' = 2iZ + 2$ فإن f دوران ☐

التمرين 2 :

المستوى مزود بمعلم متعامد متجانس مباشر $(o, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط C , B , A التي لواحقها $3 , 1 - i , 2i$ على الترتيب .

1) عين لواحق الأشعة $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$

2) عين لاحقة النقطة D حتى يكون ABCD متوازي أضلاع . ثم عين لاحقة مركزه.

التمرين 3 :

المستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس مباشر $(o, \vec{u}, \vec{v})$. عين مايلي :

1) المجموعة (E_1) للنقط M ذات اللاحقة ki حيث $k \in \mathbb{R}_+$

2) المجموعة (E_2) للنقط M ذات اللاحقة $k\left(1 + \sqrt{3}i\right)$ مع $k \in \mathbb{R}_+$

التمرين 4 :

نعتبر العدد المركب Z حيث : $Z = 1 - x + 2(1 - x^2)\,i$ حيث $x \in \mathbb{R}$

عين قيم العدد الحقيقي x في كل حالة ممايلي إن أمكن.

1) $Z \in \mathbb{R}$　2) $Z = -\overline{Z}$　3) $Re(Z) = 4$

4) $Im(Z) = 2$　5) $Z = 0$　6) $Z = 1 + i$

التمرين 5 :

نعتبر الأعداد المركبة : $Z_1 = 2 - 2i,\ Z_2 = -3 + 3i\sqrt{3}\ ,\ Z_3 = 4\sqrt{3} - 4i$

1) أكتب كل من الأعداد المركبة الآتية على الشكل المثلثي.

$$Z_1, Z_2, Z_3, Z_1 . Z_2, Z_2^2, \frac{Z_1}{Z_2}, Z_1 \times Z_2 \times Z_3, \frac{Z_2^2}{Z_1 . Z_3}, Z_3^4$$

2) أحسب مرافق العدد المركب : $\frac{2Z_1 \times Z_2}{iZ_3}$

التمرين 6 :

نعتبر الأعداد : $Z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$; $Z_2 = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$; $Z_3 = \sqrt{2} . e^{-i\frac{\pi}{4}}$

اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة الآتية :

$$\frac{Z_1^?}{Z_3^?} ; \frac{Z_1^2}{Z_2} ; Z_1 \times Z_2 \times Z_3 ; Z_1 . Z_2$$

التمرين 7 :

من العلاقتين : $cos\theta + i\,\sin\theta = e^{i\theta}$ و $cos\theta - i\,\sin\theta = e^{-i\theta}$

استنتج $cos\theta$ و $\sin\theta$ على الشكل الأسي.

التمرين 8 :

أحسب $\left(cos\theta + i\,\sin\theta\right)^4$ بطريقتين

ثم استنتج $cos4\theta$ و $\sin 4\theta$ بدلالة $cos\theta$ و $\sin\theta$

التمرين 9 :

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^4 = 1$ 2) أنشر العبارة : $(Z-1)\left(Z^3+Z^2+Z+1\right)$

3) استنتج حلول المعادلة : $Z^3+Z^2+Z+1=0$

التمرين 10 :

نعتبر المعادلة :

$$Z^2 - \left[\sqrt{3}+1+2i\right]Z + \sqrt{3} - 1 + i\left(\sqrt{3}+1\right) = 0 \ldots (1)$$

في مجموعة الأعداد المركبة.

1- أحسب : $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$.

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1). نفرض Z_1 , Z_2 حليها : $|Z_1|>|Z_2|$.

3- أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسي.

4- استنتج طويلة و عمدة $Z_1 \times Z_2$

5- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $\left(\frac{Z_1 \times Z_2}{2\sqrt{2}}\right)^n \in \mathbb{R}_+$.

6- نضع $a=\frac{Z_1}{2}$ و $b=\frac{Z_2}{\sqrt{2}}$ و $C=\frac{a+b}{1+ab}$

- تحقق أن : $|a|=|b|=1$ - أحسب $\overline{C}$ بدلالة a و b . ماذا استنتج ؟

التمرين 11 :

نعتبر العدد المركب : $Z=\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$

1- أحسب $|Z|$ و $\arg(Z)$ 2- أكتب Z على الشكل الجبري .

3- استنتج $cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$. 4- عين الأعداد الطبيعية n بحيث : $Im\left[\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^n\right]=0$

التمرين 12 :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $iZ^2 + (4_i - 3) + i - 5 = 0$

التمرين 13 :

نعتبر العبارة : $p(Z) = 4Z^3 - 6i\sqrt{3}\,Z^2 - 3\left(3+i\sqrt{3}\right)Z - 4$

1) بين أن $p(Z)$ يقبل جذرا حقيقيا α يطلب تعيينه

$p(Z) = (Z-\alpha)(aZ^2+bZ+c)$

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(Z) = 0$

التمرين 14 :

1) أحسب كل من : $(1-2i)^2$ و $(1+2i)^2$ 2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$Z^2+6Z+25=0$

3) حل $\mathbb{C}$ المعادلة : $t^4+6t^2+25=0$

التمرين 15 :

عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث :

1) $Z'-1-2i=Z$. 2) $Z'=\left(1+\sqrt{2}\right)Z-4i+4\sqrt{2}$

3) $Z'+\sqrt{2}-i=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)Z$

التمرين 16 :

لتكن النقطة M' ذات اللاحقة Z' و النقطة M ذات اللاحقة Z .

عبر عن Z' بدلالة Z إذا كانت M' صورة M بواسطة :

1- الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{W}(2;-1)$. 2- التحاكي الذي نسبته $\frac{2}{3}$ و مركزه $\Omega(3;-1)$

3- الدوران الذي زاويته $\frac{\pi}{4}$ و مركزه $\Omega(1;-1)$.

التمرين 17 :

باستعمال الشكل الأسي :

1- أحسب : $Z_1=\left(-\sqrt{3}+i\right)^{2007}$ واكتبه على الشكل الجبري

2- أحسب العدد : $Z_2=\frac{i}{2-2i\sqrt{3}}$

واكتبه على الشكل الجبري .

التمرين 18 :

A , B , C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب : $Z_A=1+i$; $Z_B=3+i$; $Z_C=1+3i$

1- أحسب طويلة العدد المركب : $Z=\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$ 2- ماهي طبيعة المثلث ABC .

التمرين 19 :

نعتبر النقطتان A و B ذات اللاحقتين i و -i على الترتيب.

نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث : $Z' = \frac{Z+i}{Z-i}$

نضع : $Z' = x' + iy'$ و $Z = x + iy$

1) أحسب x' و y' بدلالة x و y . 2) عين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' حقيقي.

3) عين مجموعة النقط M بحيث Z' تخيلي صرف 4) عين مجموعة النقط M بحيث : $|Z'| = 1$.

5) عين مجموعة النقط M بحيث تكون $\arg(Z') = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

التمرين 20 :

نعتبر العدد المركب : $Z' = \frac{1-2Z}{iZ+i}$ حيث Z عدد مركب يختلف عن 1- .

نفرض النقطة M لاحقة Z . باستعمال خواص المرافق و دون استعمال الشكل الجبري عين مجموعة النقط M بحيث : 1) Z' حقيقي . 2) Z' تخيلي صرف .

التمرين 21 :

ليكن Z_1 , Z_2 , Z_3 ثلاث أعداد مركبة حيث : $Z_1 . Z_2 . Z_3 = -8$.

عمد الأعداد Z_1 , Z_2 , Z_3 تشكل حدود متتالية حسابية أساسها $\frac{\pi}{6}$ و طويلاتها تشكل حدود متتالية هندسية أساسها $\sqrt{2}$.إذا علمت أن عمدة Z_1 تنتمي إلى $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

احسب Z_1 , Z_2 , Z_3.

التمرين 22 :

نعتبر النقط A , B , C التي لواحقها على الترتيب a , b , c حيث :

$a = 3 + i \; ; \; b = 2i \; ; \; c = 2 - 2i$

1- أحسب $\frac{c-a}{b-a}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC وبين أن C هي صورة B بتحويل يطلب إعطاء عناصره المميزة

2- نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة $Z - 1 - 3i$

أ) أحسب لاحقة النقطة D صورة B بواسطة f ب) ماهي طبيعة الرباعي ABC.

جـ) فسر هندسيا طبيعة التحويل f.

التمرين 23 :

Z عدد مركب حيث : $Z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$ مع α عدد حقيقي من المجال $[0 ; 2\pi[$. عين حسب قيم α الشكل المثلثي للعدد المركب Z .

التمرين 24 :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $2Z + 3\overline{Z} - 2i - 10 = 0$

نفرض Z_0 حل المعادلة. أحسب طويلة و عمدة Z_0.

لتكن النقطتان M و M' اللتان لاحقتاهما Z_0 و $\overline{Z_0}$. ماهي طبيعة المثلث OMM' .

التمرين 25 :

تعطى المعادلة : $Z^2 - 2(\alpha + i\beta) Z - 2 - 2i = 0$ ؛ α و β عددان حقيقيان.

Z_1 و Z_2 حلي المعادلة ، و هما لاحقتي النقطتين M_1 و M_2 على الترتيب

ليكن العدد المركب : $\gamma = \alpha + i\beta$. نفرض أن γ لاحقة النقطة N .

عين مجموعة النقط N عندما يكون ميل المستقيم (M_1M_2) مساويا إلى 1 :

(يطلب فقط إعطاء علاقة بين a و b)

الحلـــــول

التمرين 1 :

(1	√	(2	√	(3	×	(4	√
(5	√	(6	×	(7	√	(8	×
(9	√	(10	×	(11	√	(12	√
(13	×	(14	√	(15	√	(16	√
(17	√	(18	√	(19	×	(20	√
(21	×	(22	×				

التمرين 2 :

1) تعيين لواحق الأشعة :

- لاحقة $\overrightarrow{AB}$ هي $Z_B - Z_A$ أي : $1 - i - 2i$ أي $1 - 3i$
- لاحقة $\overrightarrow{AC}$ هي $Z_C - Z_A$ أي : $3 - 2i$
- لاحقة $\overrightarrow{BC}$ هي $Z_C - Z_B$ أي : $2 - i$

2) تعيين لاحقة D :

يكون الرباعي متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ وعليه :

- تعيين لاحقة المركز I :

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_B + Z_C + Z_D}{4} = \frac{2i + 1 - i + 3 + 2 + i}{4}$$

ومنه : $Z_I = \frac{6}{4} + \frac{2i}{4}$ أي : $Z_I = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

التمرين 3 : --

1) تعيين (E_1) : نفرض : $Z = ki$

إذن : $Z = k\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ أي $Z = ke^{i\frac{\pi}{2}}$ حيث : $k \in \mathbb{R}_+$

وعليه (E_1) هي نصف محور التراتيب $[OY)$

2) تعيين (E_2) : نفرض : $Z = k\left(1 + \sqrt{3}\,i\right)$

ومنه : $Z = k \,.\, 2 \,.\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ وعليه : $Z = 2k\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

ومنه (E_2) دائرة مركزها O ونصف قطرها 2k.

التمرين 4 : --

تعيين x .

1) $Z \in \mathbb{R}$ معناه : $Im(Z) = 0$ ومنه $2(1 - x^2) = 0$ وعليه : $1 - x^2 = 0$

وبالتالي : $x = 1$ أو $x = -1$

2) $Z = \bar{Z}$ وعليه $Re(Z) = 0$ وبالتالي : $1 - x = 0$ ومنه $x = 1$

3) $Re(Z) = 4$ معناه : $1 - x = 4$ ومنه $x = -3$

4) $Im(Z) = 2$ معناه : $2(1 - x^2) = 2$ ومنه: $1 - x^2 = 1$

وعليه: $x^2 = 0$ وبالتالي : $x = 0$.

5) $Z = 0$ معناه : $Re(Z) = 0$ و $Im(Z) = 0$

وعليه : $\begin{cases} 1 - x = 0 \\ 2(1 - x^2) = 0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x = 0 \\ \text{و} \\ (1 - x))(1 + x) = 0 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} x = 1 \\ \text{و} \\ x = 1 \text{ أو } x = -1 \end{cases}$ إذن : $x = 1$

6) $Z = 1 + i$ معناه $Re(Z) = 1$ و $Im(Z) = 1$

وبالتالي : $\begin{cases} 1 - x = 1 \\ 2(1 - x^2) = 1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x = 0 \\ \text{و} \\ 2 = 1 \end{cases}$ مستحيل

التمرين 5 : --

1- كتابة الأعداد المركبة المعطاة على الشكل المثلثي :

لدينا : $|Z_1| = 2\sqrt{2}$ وعليه : $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

ومنه : $\theta_1 = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ أي : $\arg(Z_1) = -\frac{\pi}{4}$

$|Z_2| = 6$ وعليه : $\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ أي

$\arg(Z_2) = \frac{2\pi}{3}$

$|Z_3| = 8$ وعليه : $\begin{cases} \cos\theta_3 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \sin\theta_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$ ومنه : $\theta_3 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ إذن : $k \in \mathbb{Z}$

$\arg(Z_3) = \frac{7\pi}{6}$

وبالتالي :

$Z_1 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$Z_2 = 6\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$. $Z_3 = 8\left[\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right]$

ولدينا : $|Z_1 . Z_2| = 2\sqrt{2} \times 6 = 12\sqrt{2}$ ... $-\pi$ ... 2π

وعليه : $Z_1Z_2 = 12\sqrt{2}\left[\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right]$

• $\left|Z_2^2\right| = (6)^2 = 36$ و $\arg\left(Z_2^2\right) = 2\arg\left(Z_2\right) = \frac{4\pi}{3}$

إذن : $Z_2^2 = 36\left[\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right]$

• $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ و $\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \frac{-\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{-11\pi}{12}$

ومنه : $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\cos\left(\frac{-11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-11\pi}{12}\right)\right]$

• $\left|Z_1 . Z_2 . Z_3\right| = 2\sqrt{2} . 6 . 8 = 96\sqrt{2}$

$$\arg\left(Z_1 . Z_2 . Z_3\right) = \frac{-\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + \frac{7\pi}{6} = \frac{19\pi}{12}$$

ومنه : $Z_1 . Z_2 . Z_3 = 96\sqrt{2}\left[\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right]$

• $\left|\frac{Z_2^2}{Z_1 . Z_3}\right| = \frac{\left|Z_2^2\right|}{\left|Z_1 . Z_3\right|} = \frac{36}{2\sqrt{2} . 8} = \frac{9}{4\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{8}$

$$\arg\left(\frac{Z_2^2}{Z_1 . Z_3}\right) = \arg\left(Z_2^2\right) - \arg\left(Z_1 . Z_3\right)$$

$$= 2\arg\left(Z_2\right) - \left(\arg\left(Z_1\right) + \arg\left(Z_3\right)\right)$$

$$= 2 . \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$$

وعليه : $\frac{Z_2^2}{Z_1 . Z_3} = \frac{9\sqrt{2}}{8}\left[\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right]$

• $\left|Z_3^4\right| = \left|Z_3\right|^4 = (8)^4 = 4096$

$$\arg\left(Z_3^4\right) = 4\arg\left(Z_3\right) = 4 . \frac{7\pi}{6} = \frac{14\pi}{3}$$

إذن: $Z_3^4 = 4096\left[\cos\frac{14\pi}{3} + i\sin\frac{14\pi}{3}\right] = 4096\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$

2) حساب المرافق :

$$\overline{\left(\frac{2Z_1 . Z_2}{iZ_3}\right)} = \frac{2\overline{Z_1} . \overline{Z_2}}{\overline{i} . \overline{Z_3}} = \frac{2\overline{Z_1} . \overline{Z_2}}{-i\ \overline{Z_3}} = \frac{2\,(2+2i)\left(-3-3i\sqrt{3}\right)}{-i\left(-4\sqrt{3}+4i\right)}$$

$$= \frac{12\left(-1+\sqrt{3} - i\left(1+\sqrt{3}\right)\right)}{4+4i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3\left[-1+\sqrt{3} - i\left(1+\sqrt{3}\right)\right]}{1+i\sqrt{3}} \times \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3\left[\left(-1+\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right) - i\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)\right]}{4}$$

$$= \frac{3\left[-1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}-3i-i-\sqrt{3}-i\sqrt{3}-3\right]}{4}$$

$$= \frac{3\,(-4-4i)}{4} = -3-3i$$

التمرين 6 :

كتابة الأعداد المركبة على الشكل الأسي :

$$Z_1 . Z_2 = 12\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)} = 12\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$Z_1 . Z_2 . Z_3 = 12\,e^{i\frac{5\pi}{4}} . \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} = 12\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)} = 12\sqrt{2}\,e^{i\pi}$$

$$\frac{Z_2^2}{Z_1} = \frac{\left(4 . e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2}{3e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{16\,e^{i\pi}}{3\,e^{e^{i\frac{3\pi}{4}}}} = \frac{16}{3} . e^{i\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{16}{3}\,e^{ie^{i\cdot\frac{\pi}{4}}}$$

$$\frac{Z_3^5}{Z_2^4} = \frac{\left(\sqrt{2} . e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^5}{\left(3e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^4} = \frac{4\sqrt{2}\,e^{-i\frac{5\pi}{4}}}{81\,e^{e^{i.3\pi}}} = \frac{4\sqrt{2}}{81} . e^{-i\frac{\pi 5}{4} - i.3\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{81} . e^{-i.\frac{17\pi}{4}}$$

التمرين 7 : ---

لدينا : $(1) \ldots \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

$(2) \ldots \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$

• نجمع (1) و (2) نجد : $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ ومنه : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

• بطرح (2) من (1) نجد : $2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ ومنه : $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

التمرين 8 : ---

• حساب : $(\cos\theta + i\sin\theta)^4$

1) بطريقة موافر : $(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$

2) بدستور ثنائي الحد :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \sum_{p=0}^{p=4} C_4^p (\cos\theta)^{4-p} . (i\sin\theta)^p$$

$$= C_4^0 (\cos\theta)^4 . (i\sin\theta)^0 + C_4^1 (\cos\theta)^{4-1} . (i\sin\theta)^1 + C_4^2 (\cos\theta)^{4-2} . (i\sin\theta)^2$$

$$+ C_4^3 (\cos\theta)^{4-3} . (i\sin\theta)^3 + C_4^4 (\cos\theta)^{4-4} . (i\sin\theta)^4$$

$$= \cos^4\theta + 4i\cos^3\theta\sin\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta - 4i\cos\theta\sin^3\theta + \sin^4\theta$$

$$= \left(\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta\right) + i\left(\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta\right)$$

الاستنتاج : من (1) و (2) نستنتج أن : $\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$

$\sin 4\theta = 4\cos^3\theta . \sin\theta - 4\cos\theta . \sin^3\theta$

التمرين 9 : ---

1) حل المعادلة : $Z^4 = 1$

أي : $Z^4 - 1 = 0$ وهي تكافئ : $(Z^2 - 1)(Z^2 + 1) = 0$

وعليه $Z^2 - 1 = 0$ أو $Z^2 + 1 = 0$ أي : $Z^2 = 1$ أو $Z^2 = -1$ أي

$Z^2 = 1$ أو $Z^2 = i^2$ ومنه : $Z = 1$ أو $Z = -1$ أو $Z = i$ أو $Z = -i$

مجموعة الحلول : $S = \{1 , -1 , i , -i\}$

2) النشر :

$(Z-1)(Z^3 + Z^2 + Z + 1) = Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z - Z^3 - Z^2 - Z - 1 = Z^4 - 1$

3) استنتاج حلول المعادلة : $Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$

من (1) حلول المعادلة $Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$ هي : $-1 , i , -i$

التمرين 10 : ---

1- حساب : $\left(\sqrt{3} - 1\right)^2$

$$\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3} . 1 + (1)^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3}$$

2- المعادلة (1) :

$$\Delta = \left[\sqrt{3} + 1 + 2i\right]^2 - 4\left[\sqrt{3} - 1 + i\left(\sqrt{3} + 1\right)\right]$$

$$\Delta = \left(\sqrt{3} + 1\right)^2 + 2\left(\sqrt{3} + 1\right) . 2i + (2i)^2 - 4\left(\sqrt{3} - 1\right) - 4i\left(\sqrt{3} + 1\right)$$

$$\Delta = 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 4\sqrt{3}\,i + 4i - 4 - 4\sqrt{3} + 4 - 4i\sqrt{3} - 4i$$

$$\Delta = 4 - 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$$

ومنه جذر Δ هو $\sqrt{3} - 1$ وبالتالي للمعادلة حلين متمايزين :

$$Z_1 = \frac{\sqrt{3} + 1 + 2i + \sqrt{3} - 1}{2} = \sqrt{3} + i \quad \text{و} \quad Z_2 = \frac{\sqrt{3} + 1 + 2i - \left(\sqrt{3} - 1\right)}{2} = 1 + i$$

إذن : $|Z_1| > |Z_2|$

- كتابة Z_1 و Z_2 على الشكل المثلثي :

$|Z_2| = \sqrt{2}$ و $\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ أي : $\theta_2 = \dfrac{\pi}{4}$ إذن : $\arg(Z_2) = \dfrac{\pi}{4}$

$|Z_1| = 2$ و $\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ أي : $\theta_1 = \dfrac{\pi}{6}$ وعليه : $\arg(Z_1) = \dfrac{\pi}{6}$

$$Z_1 = 2\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right] \quad \text{و} \quad Z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

الشكل الأسي لكل من Z_1 و Z_2 : $Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $Z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

4- استنتاج طويلة و عمدة : $Z_1 . Z_2$

$$\arg(Z_1 . Z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12} \;,\; |Z_1 . Z_2| = 2\sqrt{2}$$

5- تعيين قيم n :

لدينا : $Z_1 . Z_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right]$

ومنه : $\frac{Z_1 . Z_2}{2\sqrt{2}} = \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$

إذن : $\left(\frac{Z_1 . Z_2}{2\sqrt{2}}\right)^n = \cos\frac{5\pi n}{12} + i\sin\frac{5\pi n}{12}$

$$\left(\frac{Z_1 . Z_2}{2\sqrt{2}}\right)^n \in \mathbb{R}_+$$ تكافئ : $$\begin{cases}\sin\frac{5\pi n}{12} = 0\\ \cos\frac{5\pi n}{12} > 0\end{cases}$$

ومنه : $\frac{5\pi n}{12} = 0 + 2k\pi \;,\; k \in \mathbb{N}$

ومنه : $5\pi n = 24k\pi$ أي $5n = 24k$ إذن $n = \frac{24k}{5}$ حيث :

$k = 5\alpha \;,\; \alpha \in \mathbb{N}$ أي أن : $n = 24\alpha$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$

5- التحقق من أن : $|a| = |b| = 1$

$$|b| = \left|\frac{Z_2}{\sqrt{2}}\right| = \frac{|Z_2|}{\sqrt{2}} = 1 \;,\; |a| = \left|\frac{Z_1}{2}\right| = \frac{|Z_1|}{1} = 1$$

- حساب $\bar{C}$ بدلالة a و b

$$\bar{C} = \overline{\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)} = \frac{\bar{a}+\bar{b}}{1+\bar{a}.\bar{b}}$$

وبما أن $|a| = |b| = 1$ فإن : $\bar{a} = \frac{1}{a}$ و $\bar{b} = \frac{1}{b}$

ومنه : $\bar{C} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{1+\frac{1}{a}.\frac{1}{b}} = \frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{ab+1}{ab}}$ أي : $\bar{C} = \frac{b+a}{ab+1}$

التمرين 11 :

1- حساب $|Z|$ و $\arg(Z)$ بوضع: $Z_1 = \sqrt{3} + i$ و $Z_2 = 1 - i$

$|Z_1| = 2$ و $\begin{cases}\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_1 = \frac{1}{2}\end{cases}$ ومنه : $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$

$|Z_2| = \sqrt{2}$ و $\begin{cases}\cos\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ومنه : $\theta_2 = -\frac{\pi}{4}$

إذن : $|Z| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

و $\arg(Z) = \arg(Z_1) - \arg(Z_2) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$

2- كتابة Z على الشكل الجبري :

$$Z = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i-1}{2}$$

إذن : $Z = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

3- استنتاج $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

إذن : $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

4- تعيين n : لدينا : $Z = \sqrt{2}\left[\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right]$

ومنه : $\frac{Z}{\sqrt{2}} = \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$

ومنه : $\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^n = \cos\frac{5\pi n}{12} + i\sin\frac{5\pi n}{12}$

$\text{Im}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$ معناه : $\cos\frac{5\pi}{12} = 0$ ومنه : $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

إذن : $5\pi n = 6\pi + 12k\pi$ ومنه : $5n = 6 + 12k$

أي : $5n = 6(1+2k)$ ومنه : $\frac{n}{6} = \frac{1+2k}{5} = \alpha$

وعليه : $\frac{n}{6} = \alpha$ أي $n = 6\alpha$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$.

التمرين 12 : --

حل المعادلة : $\Delta = (4i-3)^2 - 4i(i-5)$

إذن : $\Delta = -16 - 24i + 9 + 4 + 20i$ أي $\Delta = -3 - 4i$

نحسب جذري Δ : نفرض δ جذر تربيعي للعدد Δ

$\delta = \alpha + i\beta$ ولدينا : $\begin{cases}\Delta = \delta^2 \\ |\Delta| = |\delta^2|\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}\alpha^2 - \beta^2 = -3 \ldots (1) \\ 2\alpha\beta = -4 \ldots (2) \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \ldots (3)\end{cases}$

وبجمع (1) و (3) نجد $2\alpha^2 = 2$ وعليه $\alpha^2 = 1$ ومنه $\alpha = 1$ أو $\alpha = -1$

نعوض في (2) :

لما $\alpha = 1$ ؛ $\beta = -2$ ولما $\alpha = -1$ ؛ $\beta = 2$

ومنه : جذري Δ هما : $\delta_1 = 1 - 2i$ و $\delta_2 = -1 + 2i$

وعليه للمعادلة حلين : Z_1 و Z_2 :

$Z_1 = \frac{-4i + 3 - 1 + 2i}{2i}$ و $Z_2 = \frac{-4i + 3 + 1 - 2i}{2i}$

$Z_1 = \frac{-2i + 2}{2i} = \frac{-i + 1}{i}$ و $Z_2 = \frac{-6i + 4}{2i} = \frac{-3i + 2}{i}$ وعليه :

$Z_1 = \frac{(-i+1)(-i)}{i(-i)} = -1 - i$ و $Z_2 = \frac{(-3i+2)(-i)}{i(-i)} = -3 - 2i$

التمرين 13 : --

1- تبيان أن $p(Z)$ يقبل جذر حقيقي α :

نضع $Z = \alpha$ ولدينا : $p(\alpha) = 0$ ومنه :

$$4\alpha^3 - 6i\sqrt{3}\,\alpha^2 - 3\left(3 + i\sqrt{3}\right)\alpha - 4 = 0$$

$$4\alpha^3 - 6i\sqrt{3}\,\alpha^2 - 9\alpha - 3i\sqrt{3}\,\alpha - 4 = 0$$

$$4\alpha^3 - 9\alpha - 4 - i\left(6\sqrt{3}\,\alpha^2 + 3\sqrt{3}\,\alpha\right) = 0$$

$$4\alpha^3 - 9\alpha - 4 - 3\sqrt{3}\,i\left(2\alpha^2 + \alpha\right) = 0$$

ومنه : $\begin{cases}4\alpha^3 - 9\alpha - 4 = 0 \ldots (1) \\ 2\alpha^2 + \alpha = 0 \ldots (2)\end{cases}$

لحل (2) : $2\alpha^2 + \alpha = 0$ إذن $\alpha = 0$ أو $\alpha = -\frac{1}{2}$

بالتعويض في (1) نجد : $\alpha = -\frac{1}{2}$ مقبول ومنه $\alpha = -\frac{1}{2}$

2- تعيين a, b, c : $p(Z) = (Z - \alpha)\left(aZ^2 + bZ + c\right)$

إذن : $p(Z) = aZ^3 + bZ^2 + cZ - a\alpha Z^2 - b\alpha Z - \alpha C$

ومنه : $\begin{cases}a = 4 \\ b - a\alpha = -6i\sqrt{3} \\ c - b\alpha = -9 - 3i\sqrt{3} \\ -\alpha c = -4\end{cases}$ لكن $\alpha = -\frac{1}{2}$

إذن : $\begin{cases}a = 4 \\ b + 2 = -6i\sqrt{3} \\ c + \frac{1}{2}b = -9 - 3i\sqrt{3} \\ +\frac{1}{2}c = -4\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}a = 4 \\ b = -2 - 6i\sqrt{3} \\ c = -8\end{cases}$

وبالتالي : $p(Z) = \left(Z + \frac{1}{2}\right)\left[4Z^2 - \left(2 + 6\sqrt{3}\,i\right)Z - 8\right]$ ،

3- حل المعادلة $p(Z) = 0$

$p(Z) = 0$ تكافئ $4Z^2 - \left(2 + 6\sqrt{3}\, i\right) Z - 8 = 0$ أو $Z + \frac{1}{2} = 0$

ومنه $Z = -\frac{1}{2}$ أو $4Z^2 - 2\left(1 + 3\sqrt{3}i\right) Z - 8 = 0$ ،

أي : $2Z^2 - \left(1 + 3\sqrt{3}i\right) Z - 4 = 0$ ومنه : $\Delta = \left(1 + 3\sqrt{3}i\right)^2 \; 4(2)(-4)$

أي أن : $\Delta = 1 + 6\sqrt{3}\, i - 27 + 32 = 6 + 6\sqrt{3}\, i$ وعليه $\Delta = 6\left(1 + \sqrt{3}i\right)$

حساب الجذرين التربيعيين للعدد $1 + \sqrt{3}\, i$

نفرض δ جذر تربيعي لـ $1 + \sqrt{3}\, i$ فيكون $\delta^2 = 1 + \sqrt{3}\, i$

وليكن $\delta = \alpha + i\beta$ ومنه :
$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 1 \ldots (1) \\ 2\alpha\beta = \sqrt{3} \ldots (2) \\ \alpha^2 + \beta^2 = 2 \ldots (3) \end{cases}$$
بجمع (1) و (3) نجد : $2\alpha^2 = 3$

ومنه $\alpha^2 = \frac{3}{2}$ وعليه : $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ أو $\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

بالتعويض في (2) :

لما $\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$ فإن : $\beta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ أي : $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

لما $\alpha = \frac{-\sqrt{6}}{2}$ فإن : $\beta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

ومنه يوجد جذرين $\delta_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\delta_2 = \frac{-\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ومنه جذري Δ هما : $\sqrt{6}\,.\,\delta_1$ و $\sqrt{6}\,.\,\delta_2$ وعليه الجذرين هما : $3 + i\sqrt{3}$ و $-3 - i\sqrt{3}$

وبالتالي للمعادلة حلين متمايزين. $Z_1 = \frac{1 + 3\sqrt{3}\, i - 3 - i\sqrt{3}}{4}$

و $Z_2 = \frac{1 + 3\sqrt{3}\, i + 3 + i\sqrt{3}}{4}$

إذن : $Z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i$ و $Z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة الأولى هي : $S = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i, 1 + i\sqrt{3}\right\}$

1- حساب :

$(1 - 2i)^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$

$(1 + 2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$

2- حل المعادلة : $Z^2 + 6Z + 25 = 0$

$\Delta' = (3)^2 - 25 = -16$ أي $\Delta' = 16i^2$ ومنه للمعادلة حلين هما : $Z_1 = -3 - 4i$ و $Z_2 = -3 + 4i$

3- حل المعادلة : $t^4 + 6t + 25 = 0$

بوضع $t^2 = Z$ نجد : $Z^2 + 6Z + 25 = 0$ وحليها : $Z_1 = -3 - 4i$ و $Z_2 = -3 + 4i$

ومنه : $t^2 = -3 - 4i$ و $t^2 = -3 + 4i$

ومن (1) : $t^2 = (1 - 2i)^2$ أو $t^2 = (1 + 2i)^2$

وعليه : $t = 1 - 2i$ أو $t = -1 + 2i$ أو $t = 1 + 2i$ أو $t = -1 - 2i$

وعليه مجموعة الحلول : $S = \{-1 - 2i, 1 + 2i, -1 + 2i, 1 - 2i\}$

تعيين طبيعة f

أولا : 1) $Z' - 1 - 2i = Z$

ومنه $Z' = Z + 1 + 2i$ ومنه f انسحاب شعاعه $\vec{W}\,(1\,;2)$

2) $Z' = \left(1 + \sqrt{2}\right) Z - 4i + 4\sqrt{2}$

ومنه : $Z' = aZ + b$ حيث $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

وعليه f تحاكي نسبته a أي $1 + \sqrt{2}$ ومركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $Z_0 = \frac{b}{1 - a}$

أي : $Z_0 = \frac{-4i + \sqrt{2}}{1 - 1 - \sqrt{2}}$ ومنه : $Z_0 = \frac{-4i + \sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$

أي : $Z_0 = \frac{4i\sqrt{2} - 2}{2}$ وعليه : $Z_0 = -1 + 2i\sqrt{2}$

$$Z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,Z - \sqrt{2} + 1 + i$$

لدينا : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ، $|1-i| = \sqrt{2}$

وعليه : $\arg(1-i) = \frac{-\pi}{4}$ ومنه : $1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

وعليه : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) = e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ومنه : $Z' = e^{-i\frac{\pi}{4}} Z - \sqrt{2} + 1 + i$

وبالتالي فهو من الشكل : $Z' = aZ + b$ حيث : $a = e^{i\theta}$

إذن f دوران زاويته $\theta = -\frac{\pi}{4}$ ومركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $Z_0 = \frac{b}{1-a}$

$$Z_0 = \frac{-\sqrt{2}+1+i}{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{(-\sqrt{2}+1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$Z_0 = \sqrt{2} \times \frac{-\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 1 + i + i - 1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sqrt{2} - i\sqrt{2} + 2i\right)$$

$$Z_0 = -1 - i + i\sqrt{2} = -1 + \left(-1+\sqrt{2}\right) i$$

وبالتالي : $\Omega\left(-1 \,;\, -1+\sqrt{2}\right)$

التمرين 16 :

1) $Z' = aZ + b$ حيث $b = 2 - i$ و $a = 1$ ومنه : $Z' = Z + 2 - i$

2) $Z' = aZ + b$ حيث : $a = \frac{2}{3}$ و $\frac{b}{1-a} = 3 - i$

وعليه : $\frac{b}{1-\frac{2}{3}} = 3 - i$ إذن : $\frac{b}{\frac{1}{3}} = 3 - i$ ومنه : $3b = 3 - i$

وعليه : $b = 1 - \frac{1}{3}i$ وبالتالي : $Z' = \frac{2}{3}Z + 1 - \frac{1}{3}i$

3) $Z' = aZ + b$ حيث : $a = e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $\frac{b}{1-a} = 1 - i$

وعليه : $\frac{b}{1 - e^{i\frac{\pi}{4}}} = 1 - i$ إذن : $b = (1-i)\left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$

وبالتالي : $b = 1 - e^{i\frac{\pi}{4}} - i + i e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه: $b = 1 - i - e^{i\frac{\pi}{4}} + i e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$b = 1 - i - \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) + i\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$b = 1 - i - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \sqrt{2} - i$$

ومنه : $Z' = e^{i\frac{\pi}{4}} Z + 1 - \sqrt{2} - i$

التمرين 17 :

1) لدينا : $\left|-\sqrt{3} + i\right| = 2$ ، فإذا كانت $\arg\left(-\sqrt{3} + i\right) = \theta$

فإن : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ ومنه : $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ومنه : $-\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$$Z_1 = \left(-\sqrt{3}+i\right)^{2007} = 2^{2007} . \left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{2007}$$

$$= 2^{2007} . e^{i\frac{5\pi}{6}\times 2007} = 2^{2007} . e^{i.\frac{10035\pi}{6}}$$

لكن: $\frac{10035\pi}{6} = \frac{1672 \times 6\pi + 3\pi}{6}$ أي : $\frac{10035\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 1672\pi$

وعليه : $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{2007} = 2^{2007} . e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 1672\pi\right)} = 2^{2007} . e^{i\frac{\pi}{2}}$

وبالتالي : $Z_1 = 2^{2007}(1) = 2^{2007}$

(2 $Z_2 = \frac{i}{2 - 2i\sqrt{3}}$

• لدينا : $|i| = 1$, $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ ومنه : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

• ولدينا : $|2 - 2i\sqrt{3}| = 4$ فإذا كانت عمدة $(2 - 2i\sqrt{3})$ هي θ فإن :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

ومنه : $\theta = -\frac{\pi}{3}$ وبالتالي : $2 - 2i\sqrt{3} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$

إذن : $Z_2 = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{4e^{-i\frac{\pi}{3}}}$ أي : $Z_2 = \frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{2}} . e^{i\frac{\pi}{3}}$

إذن : $Z_2 = \frac{1}{4} e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}$ وبالتالي : $Z_2 = \frac{1}{4} e^{i.\frac{5\pi}{6}}$

إذن : $Z_2 = \frac{1}{4}\left[\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right]$

إذن : $Z_2 = \frac{1}{4}\left[\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]$ أي أن : $Z_2 = \frac{-\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}i$

التمرين 18 : --

1- حساب طويلة و عمدة Z : $Z = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ لدينا : $Z = \frac{1 + 3i - 1 - i}{3 + i - 1 - i}$

ومنه : $Z = \frac{2i}{2}$ إذن : $Z = i$ وبالتالي : $|Z| = 1$ و $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}$

2- طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $Z = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ ومنه : $|Z| = \frac{|Z_C - Z_A|}{|Z_B - Z_A|}$ إذن : $|Z| = \frac{AC}{AB}$

لكن : $|Z| = 1$ ومنه : $\frac{AC}{AB} = 1$ أي أن : $AC = AB$

لدينا : $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ ومنه : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$

وبالتالي المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين.

التمرين 19 : --

1) حساب x' و y' بدلالة x و y :

$$Z' = \frac{Z + i}{Z - i}$$

$$x' + iy' = \frac{x + iy + i}{x + iy - i} = \frac{x + i(y+1)}{x + i(y-1)} = \frac{x + i(y+1)}{x + i(y-1)} \times \frac{x - i(y-1)}{x - i(y-1)}$$

$$= \frac{x^2 - ix(y-1) + ix(y+1) + (y+1)(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 1 + ix(-y + 1 + y + 1)}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$x' + iy' = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2} + i\,\frac{2x}{x^2 + (y-1)^2}$$

وعليه :

$$\begin{cases} x' = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2} \\ y' = \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2} \end{cases}$$

2) يكون Z' حقيقي إذا وفقط إذا كان : $y' = 0$

ومنه : $\frac{2x}{x^2 + (y-1)^2} = 0$ وبالتالي : $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 \neq 0 \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} x = 0 \\ (x ; y) \neq (0 , 1) \end{cases}$

ومنه مجموعة النقط M هي محور التراتيب باستثناء $\Omega(0 ; 1)$

3) يكون Z' تخيلي إذا وفقط إذا كان : $x' = 0$

ومنه : $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 \neq 0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \text{و} \\ (x ; y) \neq (0 ; 1) \end{cases}$

مجموعة النقط M هي الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 1 باستثناء النقطة $\Omega\ (0\ ;\ 1)$

4) يكون $|Z'| = 1$ إذا كان : $\left|\dfrac{Z+i}{Z-i}\right| = 1$ ومنه : $\dfrac{|Z+i|}{|Z-i|} = 1$

أي أن : $\dfrac{BM}{AM} = 1$ إذن : $BM = AM$ أي $MA = MB$

إذن مجموعة النقط M هي محور $[AB]$ وهو محور الفواصل.

5) يكون $\arg(Z') = \dfrac{\pi}{4}$ إذا وفقط إذا كان : $x' = y'$

ومنه : $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 2x \\ \text{و} \\ (x\ ;\ y) \neq (0\ ;\ 1) \end{cases}$ أي $\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 1 = 0 \\ \text{و} \\ (x\ ;\ y) \neq (0\ ;\ 1) \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 2 \\ \text{و} \\ (x\ ;\ y) \neq (0\ ;\ 1) \end{cases}$ ومنه مجموعة النقط M هي الدائرة ذات المركز $D\ (1;0)$ و نصف القطر $\sqrt{2}$ باستثناء $\Omega\ (0\ ;\ 1)$

التمرين 20 : --

تعيين مجموعة النقط :

1) Z حقيقي معناه : $Z' = \overline{Z'}$ وعليه

$\dfrac{1-2Z}{iZ+i} = \dfrac{1-2\overline{Z}}{-i\,\overline{Z}-i}$ وعليه : $(1-2Z)\left(-i\overline{Z}-i\right) = \left(1-2\overline{Z}\right)\left(i\overline{Z}+i\right)$

$-i\overline{Z} - i + 2i\,Z\overline{Z} + 2i\,Z = iZ + i - 2i\,Z\overline{Z} - 2i\overline{Z}$

$-i\overline{Z} - i + 2i\,Z\overline{Z} + 2iZ - iZ - i + 2i\,Z\overline{Z} + 2i\overline{Z} = 0$

$i\overline{Z} - 2i + 4i\,Z\overline{Z} + iZ = 0$ ومنه $i\left(\overline{Z} + Z\right) + 4i\,Z\overline{Z} - 2i = 0$

وعليه : $i\left[\overline{Z} + Z + 4\,Z\overline{Z} - 2\right] = 0$ إذن : $Z + \overline{Z} + 4Z\overline{Z} - 2 = 0$

وبالتالي : $2x + 4\,(x^2 + y^2) - 2 = 0$ حيث x و y هما احداثيي M . وعليه:

$\dfrac{1}{2}x + x^2 + y^2 - \dfrac{1}{2} = 0$ أي أن : $x^2 + \dfrac{1}{2}x + y^2 - \dfrac{1}{2} = 0$

وبالتالي:

$\left(x + \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{16} + y^2 - \dfrac{1}{2} = 0$. إذن : $\left(x + \dfrac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \dfrac{9}{16}$

ومنه مجموعة النقط هي الدائرة ذات المركز $\Omega\left(\dfrac{-1}{4}\ ;\ 0\right)$ ونصف القطر $\dfrac{3}{4}$ باستثناء النقطة $D(-1;0)$

2) Z' تخيلي صرف يكافئ : $Z' + \overline{Z'} = 0$

وعليه : $\dfrac{1-2Z}{iZ+i} + \dfrac{1-2\overline{Z}}{-i\overline{Z}-i} = 0$ إذن : $\dfrac{1-2Z}{iZ+i} - \dfrac{1-2\overline{Z}}{i\overline{Z}+i} = 0$

ومنه : بعد الجمع نجد: $3i\left(\overline{Z} - Z\right) = 0$ و $Z \neq -1$

ومنه : $\overline{Z} - Z = 0$ و $Z \neq -1$ أي أن : $y = 0$ حيث $(x\ ;\ y) \neq (-1\ ;\ 0)$

ومنه مجموعة النقط من محور الفواصل باستثناء النقطة $\Omega\ (-1\ ;\ 0)$

التمرين 21 : --

نفرض $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ عمدالأعداد المركبة Z_1, Z_2, Z_3 على الترتيب فيكون :

$\theta_2 = \theta_1 + \dfrac{\pi}{6}$ و $\theta_3 = \theta_1 + 2\,.\,\dfrac{\pi}{6}$

أي : $\theta_2 = \theta_1 + \dfrac{\pi}{6}$ و $\theta_3 = \theta_1 + \dfrac{\pi}{3}$

لكن $\arg\left(Z_1\,.\,Z_2\,.\,Z_3\right) = \pi$ لأن : $Z_1\,.\,Z_2\,.\,Z_3 = -8$

وعليه : $\arg\left(Z_1\right) + \arg\left(Z_2\right) + \arg\left(Z_3\right) = \pi$

ومنه : $\theta_1 + \theta_1 + \dfrac{\pi}{6} + \theta_1 + \dfrac{\pi}{3} = \pi$ إذن : $3\theta_1 = 0$

ومنه $\theta_1 = 0$ وعليه : $\theta_2 = \dfrac{\pi}{6}$, $\theta_3 = \dfrac{\pi}{3}$

ولنفرض ρ_1, ρ_2, ρ_3 طويلات الأعداد Z_1, Z_2, Z_3 على الترتيب

فيكون : $\rho_2 = \rho_1\sqrt{2}$ و $\rho_3 = \rho_1\left(\sqrt{2}\right)^2$ ومنه $\rho_3 = 2\rho_1$

لكن : $\left|Z_1\,.\,Z_2\,.\,Z_3\right| = |-8| = 8$ ومنه : $|Z_1|\,.\,|Z_2|\,.\,|Z_3| = 8$

ومنه : $\rho_1\,.\,\rho_1\,.\,\sqrt{2}\,.\,2\rho_1 = 8$ وبالتالي : $\rho_1^3 = \dfrac{8}{2\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

أي : $\rho_1^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3$ ومنه : $\rho_1 = \sqrt{2}$ و $\rho_2 = 2$ و $\rho_3 = 2\sqrt{2}$

إذن : $Z_1 = \sqrt{2}\ [cos\,0 + i \sin 0]$ أي $Z_1 = \sqrt{2}$

$Z_2 = 2\left[cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$ أي $Z_2 = \sqrt{3} + i$

$Z_3 = 2\sqrt{2}\left[cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$ أي $Z_3 = \sqrt{2} + \sqrt{6}\,i$

التمرين 22 : --

1-حساب : $\frac{c - a}{b - a}$

$$\frac{c - a}{b - a} = \frac{2 - 2i - 3 - i}{2i - 3 - i} = \frac{-1 - 3i}{-3 + i} = \frac{(-1 - 3i)(-3 - i)}{(-3 + i)(-3 + i)} = \frac{3 + i + 9i - 3}{10} = i$$

إذن : $\frac{c - a}{b - a} = i$

طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\left|\frac{c - a}{b - a}\right| = 1$ ومنه : $\frac{AC}{AB} = 1$ أي : $AC = AB$

ولدينا : $\arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) = \frac{\pi}{2}$ ومنه : $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين .

لدينا : $\begin{cases} AC = AB \\ \left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ومنه الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول B إلى C

2- أ) حساب لاحقة D :

لدينا: $f(B) = D$ ومنه : $Z_D = Z_B - 1 - 3i$ أي : $Z_D = 2i - 1 - 3i$

إذن : $Z_D = -1 - i$

ب) طبيعة الرباعي ABDC :

لدينا : $Z_B - Z_A = -3 + i$ ومنه : $AB = \sqrt{10}$

ولدينا : $Z_D - Z_C = -3 + i$ ومنه : $CD = \sqrt{10}$ إذن : $AB = CD$

وكذلك : $Z_A - Z_C = 1 + 3i$ ومنه : $CA = \sqrt{10}$

$Z_B - Z_D = 1 + 3i$ ومنه : $DB = \sqrt{10}$

إذن كل أضلاع الرباعي ABDC متقايسة و لدينا $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$

ومنه الرباعي ABDC مربع.

جـ) التفسير الهندسي لطبيعة f :

لدينا $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ وعليه : f انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AC}$ ذو اللاحقة $-1 - 3i$.

التمرين 23 : --

تعيين الشكل المثلثي للعدد Z : $Z = 1 + cos\alpha + i\sin\alpha$

لدينا : $cos\alpha = 2cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ و $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\alpha}{2}$

ومنه : $Z = 2cos^2\frac{\alpha}{2} + 2i\sin\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\alpha}{2}$

$$Z = 2cos\frac{\alpha}{2}\left[cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right]$$

• إذا كان : $0 \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ أي $0 \leq \alpha < \pi$ فإن $cos\frac{\alpha}{2} > 0$

ومنه الشكل المثلثي للعدد Z هو : $Z = 2cos\frac{\alpha}{2}\left[cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right]$

• إذا كان : $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$ أي $\alpha = \pi$ فإن $Z = 0$ ومنه ليس له شكلا مثلثيا.

• إذا كان : $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ أي $\pi < \alpha < 2\pi$ فإن $cos\frac{\alpha}{2} < 0$

ومنه : $Z = -2cos\frac{\alpha}{2}\left[-cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\right]$

ومنه : $Z = -2cos\frac{\alpha}{2}\left[-cos\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right)\right]$

وهو الشكل المثلثي للعدد Z لأن : $-2cos\frac{\alpha}{2} > 0$

التمرين 24 : --

حل المعادلة : $2Z + 3\overline{Z} - 2i - 10 = 0$

بوضع $Z = x + iy$ نجد : $\overline{Z} = x - iy$

وبالتعويض في المعادلة نجد : $2(x + iy) + 3(x - iy) - 2i - 10 = 0$

إذن : $2x + 2iy + 3x - 3iy - 2i - 10 = 0$

أي : $5x - 10 - iy - 2i = 0$ ومنه : $5x - 10 - i(y + 2) = 0$

وعليه : $\begin{cases} 5x - 10 = 0 \\ \text{و} \\ y + 2 = 0 \end{cases}$ وعليه : $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$ إذن : $Z_0 = 2 - 2i$

$|Z_0| = 2\sqrt{2}$ ، نفرض θ عمدة Z_0 فيكون : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

ومنه : $\theta = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

ومنه عمدة Z_0 هي : $\frac{-\pi}{4}$ لدينا : عمد $\overline{Z_0}$ هي $\frac{\pi}{4}$ و $|\overline{Z_0}| = 2\sqrt{2}$

وعليه : $|Z_0| = |\overline{Z_0}| = 2\sqrt{2}$ وبالتالي : $OM' = OM$

ولدينا : $\frac{Z_0 - 0}{\overline{Z_0} - 0} = \frac{2 - 2i}{2 + 2i}$ أي $\frac{Z_0 - 0}{\overline{Z_0} - 0} = -i$ ومنه : $(\overrightarrow{OM'} ; \overrightarrow{OM}) = -\frac{\pi}{2}$

إذن المثلث OMM' قائم في O ومتساوي الساقين .

التمرين 25 : --

بماأن Z_1 و Z_2 حلي المعادلة فإن : $Z_1 + Z_2 = \frac{-b}{a}$

أي : $Z_1 + Z_2 = \frac{2(\alpha + i\beta)}{1}$ أي : $Z_1 + Z_2 = 2(\alpha + i\beta)$

وكذلك : $Z_1 . Z_2 = \frac{c}{a}$ أي : $Z_1Z_2 = -2 - 2i$

بما أن ميل المستقيم (M_1M_2) يساوي 1فإن (M_1M_2) : ينطبق على المنصف الأول.

لكن الشعاع $\overrightarrow{M_1M_2}$ هو صورة $Z_1 - Z_2$ومنه عمدة $(Z_2 - Z_1)$: هي $\frac{\pi}{4}$.

وبالتالي : $\arg(Z_2 - Z_1) = \frac{\pi}{4}$ ومنه : $2\arg(Z_2 - Z_1) = \frac{\pi}{2}$

أي أن : $\arg(Z_2 - Z_1)^2 = \frac{\pi}{2}$ ومنه : $\arg\left[Z_2^2 - 2Z_1Z_2 + Z_1^2\right] = \frac{\pi}{2}$

أي : $\arg\left[Z_2^2 + 2Z_1Z_2 + Z_1^2 - 4Z_1Z_2\right] = \frac{\pi}{2}$

وعليه : $\arg\left[(Z_2 + Z_1)^2 - 4Z_2Z_2\right] = \frac{\pi}{2}$

أي : $\arg\left[(2\alpha + 2i\beta)^2 + 8 + 8i\right] = \frac{\pi}{2}$

$\arg\left[4\alpha^2 + 8i\alpha\beta - 4\beta^2 + 8 + 8i\right] = \frac{\pi}{2}$

وبالتالي : $\arg\left[4\alpha^2 - 4\beta^2 + 8 + 8i(\alpha\beta + 1)\right] = \frac{\pi}{2}$

إذن $\begin{cases} 4\alpha^2 - 4\beta^2 + 8 = 0 \\ \alpha\beta + 1 > 0 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 + 2 = 0 \\ \alpha\beta + 1 > 0 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -2 \\ \beta > -\frac{1}{\alpha} \end{cases}$

ويمكن حل بيانيا هذه الجملة بإنشاء البيان ذو المعادلة $x^2 - y^2 = -2$ وهو قطع زائد .

وكذلك إنشاء القطع الزائد الذي معادلته $y = \frac{-1}{x}$ ثم تعيين نقط التقاطع واستنتاج حلول الجملة.

12- التشابه المستوي المباشر

1-تعريف :

ω نقطة ثابتة. θ عدد حقيقي ، k عدد حقيقي موجب تماما

التشابه الذي مركزه ω ونسبته k وزاويته θ هو التحويل النقطي الذي يرفق ω بنفسها

ويرفق بكل نقطة M تختلف عن ω النقطة M' حيث : $\begin{cases} \omega M' = k \,.\, \omega M \\ \left(\overrightarrow{\omega M} \,,\, \overrightarrow{\omega M'}\right) = \theta \end{cases}$

حالات خاصة :

- إذا كان $k = 1$ فإن التشابه هو إزاحة أي دوران إذا كانت θ غير معدومة وهو التحويل المطابق إذا كانت $\theta = 0$
- إذا كانت $\theta = 0$ فإن التشابه هو التحاكي الذي نسبته k ومركزه ω

2-الكتابة المركبة للتشابه :

ليكن s تشابه مستوي مباشر مركزه ω ونسبته k وزاويته θ

لدينا : $\begin{cases} \omega M' = k \,.\, \omega M \\ \left(\overrightarrow{\omega M} \,,\, \overrightarrow{\omega M'}\right) = \theta \end{cases}$ حيث $S(M) = M'$ نفرض Z', Z, Z_0 لواحق

النقط ω, M, M' على الترتيب.بما أن $\omega M' = k\omega M$ فإن :

$|Z' - Z_0| = k \,.\, |Z - Z_0|$ ولدينا : $\left(\overrightarrow{\omega M} \,,\, \overrightarrow{\omega M'}\right) = \theta$ ومنه :

$\left(\vec{U} \,,\, \overrightarrow{\omega M'}\right) - \left(\vec{U} \,,\, \overrightarrow{\omega M}\right) = \theta$ وعليه

$\arg(Z' - Z_0) - \arg(Z - Z_0) = \theta$ إذن : $\arg(Z' - Z_0) = \theta + \arg(Z - Z_0)$ وبالتالي

$\begin{cases} |Z' - Z_0| = k\,|Z - Z_0| \\ \arg(Z' - Z_0] = \theta + \arg(Z - Z_0) \end{cases}$ ومنه نستنتج أن : $Z' - Z_0 = a\,(Z - Z_0)$ حيث

$|a| = k$ و $\arg(a) = \theta$

أي أن : $a = k\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ ومنه الشكل العام للتشابه هو : $Z' = aZ + b$

مثال : الشكل المركب للتشابه المستوي المباشر الذي مركزه ω و نسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$ حيث

لاحقة ω هي $2 + i$ هو : $Z' - (2 + i) = a\,[2 - (2 + i)]$

حيث $a = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

وبالتالي : $Z' - (2 + i) = \left(1 + i\sqrt{3}\right)[Z - (2 + i)]$

$$Z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right) Z - \left(1 + i\sqrt{3}\right).\,(2 + i) + 2 + i$$

$$Z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right) Z - 2 + \sqrt{3} - i - 2i\sqrt{3}$$

حالات خاصة :

1) إذا كان : $k = 1$ و $\theta = o$ فإن : $Z' - Z_0 = Z - Z_0$

أي : $Z' = Z$ ومنه التحويل هو التحويل المطابق

2) إذا كان $k = 1$ و $\theta \neq 0$ فإن : $Z' - Z_0 = a(Z - Z_0)$

حيث $a = \cos\theta + i\sin\theta$ ومنه s هو الدوران الذي مركزه ω وزاويته θ .

3) إذا كان $k \neq 1$ و $\theta = 0$ فإن : $Z' - Z_0 = k(Z - Z_0)$

حيث $k \in \mathbb{R}^+$ ومنه s هو التحاكي الذي مركزه ω ونسبه k .

3-الشكل الأسي للتشابه المستوى المباشر :

ليكن s التشابه المستوى المباشر الذي مركزه النقطة ω ذات اللاحقة Z_0 ونسبته k وزاويته θ والذي يحول النقطة M ذات اللاحقة Z إلى النقطة M' ذات اللاحقة Z' فيكون

$Z' - Z_0 = a(Z - Z_0)$ حيث : $a = k\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

ومنه : $a = k \,.\, e^{i\theta}$ وعليه : $Z' - Z_0 = e^{i\theta} \,.\, (Z - Z_0)$

4-الخاصية المميزة لتشابه مباشر :

مبرهنة :

K عدد حقيقي موجب و θ عدد حقيقي. يكون التحويل النقطي f تشابه مباشر نسبته k وزاويته θ إذا وفقط إذا كان :من أجل كل ثنائية نقطية $(A\ ;\ M)$ صورتها $(A'\ ;\ M')$ حيث A لا تنطبق على A' فإن :

$$\begin{cases} A'M' = k\,AM \\ \left(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{A'M'}\right) = \theta + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

نتيجة :

- التشابه المستوى المباشر يحافظ على نسب المسافات لأن : $\dfrac{A'M'}{AM} = k$

- التشابه المستوى المباشر يحافظ على الزوايا الموجهة لأن : $\left(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{A'M'}\right) = \theta + 2k\pi$

5-مركب تشابهين مباشرين :

نفرض S_1 تشابه مركزه ω_1 ونسبته k_1 وزاويته θ_1 وS_2 تشابه مركزه ω_2 ونسبته k_2 وزاويته θ_2. حيث Z_0 , Z'_0 لاحقتي ω_1 , ω_2.لنفرض : M , M_1 , M' ثلاث نقط لواحقها Z , Z_1 , Z' على الترتيب حيث $S_1(M) = M_1$ و $S_2(M_1) = M'$ أي :

$$M \xrightarrow{S_1} M_1 \xrightarrow{S_2} M'$$

فيكون $Z_1 - Z_0 = a_1\ (Z - Z_0)$ حيث : $\begin{cases} |a_1| = k_1 \\ \arg(a_1) = \theta_1 \end{cases}$

وكذلك : $Z' - Z'_0 = a_2\ (Z_1 - Z'_0)$ حيث : $\begin{cases} |a_2| = k \\ \arg(a_2) = \theta_2 \end{cases}$

ومنه : $Z_1 = a_1\ Z + (1 - a_1)\ Z_0$ أي $Z' = a_2\ Z_1 + (1 - a_2)\ Z'_0$

وبالتالي : $Z' = a_2\ \left[a_1\ Z + (1 - a_1)\ Z_0\right] + (1 - a_2)\ Z'_0$

إذن : $Z' = a_2 a_1 Z + a_2 (1 - a_1)\ Z_0 + (1 - a_1)\ Z'_0$ وعليه :

1) إذا كان : $a_2 a_1 = 1$ فإن $S_2 o S_1$ إزاحة.

2) إذا كان : $a_2 a_1\ \neq\ 1$ فإن $S_2 o S_1$ تشابه مستوى مباشر نسبته $|a_2\ .\ a_1| = k_2\ .\ k_1$ وزاويته $\arg(a_2\ .\ a_1)$ أي : $\theta_2 + \theta_1$ ومركزه النقطة الصامدة ω .

6-دراسة التحويلات النقطية :

$f\ :M(Z) \longrightarrow M'(Z')$ حيث : $Z' = aZ + b$ و a و b عددان مركبان.

1) إذا كان $a = 1$ و $b = 0$: $f\ :Z' = Z$ هو التحويل المطابق

2) إذا كان $a = 1$ و $b\ \neq\ 0$: $f:Z' = Z + b$ هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{W}$ ذو اللاحقة b.

3) إذا اكن $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$: $f : Z' = aZ + b$ هو تحاك نسبته k ومركزه النقطة ω ذات اللاحقة $\dfrac{b}{1 - a}$.

4) إذا كان $a \in \mathbb{C}$ حيث $|a| = 1$ و $\mathrm{Im}(a)\ \neq\ 0$ فإن f دوران زاويته θ عمدة العدد المركب a ومركزه النقطة ω ذات اللاحقة $\dfrac{b}{1 - a}$

5) إذا كان $a \in \mathbb{C}$ حيث $|a|\ \neq\ 1$ و $\mathrm{Im}(a)\ \neq\ 0$ فإن f تشابه مستوى مباشر نسبته k حيث $k = |a|$ وزاويته θ عمدة العدد المركب a . ومركزه النقطة ω ذات اللاحقة $\dfrac{b}{1 - a}$.

التمـــــاريـــــن

التمرين 1 :

ضع العلامة √ أمام كل جملة صحيحة و العلامة × أمام كل جملة خاطئة.

1) التشابه يحافظ على المسافات ☐

2) صورة دائرة بتشابه هي دائرة تقايسها ☐

3) كل دوران هو تشابه نسبته 1 ☐

4) مركب تشابهين لهما نفس المركز ω هو تشابه مركزه ω ☐

5) مركب التشابهين $S_1\left(\omega , \frac{\pi}{12} , 3\right)$ و $S_2\left(\omega , \frac{\pi}{4} , 4\right)$ هو التشابه $S\left(\omega , \frac{5\pi}{12} , 12\right)$ ☐

6)صورة مستقيم بتشابه هو مستقيم يوازيه ☐

7) يوجد تشابهين تركيبهما دوران ☐

8) يوجد تشابهين تركيبهما تحاكي ☐

التمرين 2 :

S تشابه مستوى مباشر نسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{6}$. ومركزه النقطة ω ذات اللاحقة $3 + i$.لتكن M نقطة لاحقتاهما Z و M' صورتها بواسطة S

- عين اللاحقة Z' للنقطة M' بدلالة Z. - عين الشكل الأسي لهذا التشابه.

- نفرض (x' , y') احداثيي Z' و (x , y) احداثيي M .أكتب x' , y' بدلالة x , y.

التمرين 3 :

نعتبر التحويل النقطيf الذي يرفق بالنقطة M ذات الاحداثيين (x , y) النقطة M' ذات الاحداثيين (x' , y') حيث :

$$\begin{cases} x' = 4(x - y) \\ y' = 4(x + y) + 1 \end{cases}$$

نفرض Z و Z' لاحقتي M و M' على الترتيب . أكتب Z' بدلالة Z .ماهي طبيعة f وعناصره المميزة

التمرين 4 :

f تحويل نقطي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث:

$Z' = -2\left(1 + \sqrt{3}\, i\right) Z - 2 - i\sqrt{3}$. عين طبيعة التحويل f وعناصره المميزة.

استنتج الشكل الأسي لهذا التحويل.

التمرين 5 :

B' , A' , B , A أربعة نقط في المستوى لواحقها Z_4 , Z_3 , Z_2 , Z_1 على الترتيب حيث $Z_1 = 1$ و $Z_2 = 5 + i$ و $Z_3 = 11 - 14i$, $Z_4 = -3 + 5i$

عين نسبة التشابهS علما أن : $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$.

التمرين 6 :

A و B نقطتان في المستوي لاحقتاهما : $1 + i$, $-1 + 2i$ على الترتيب

f تشابه مستوي مباشر مركزه A ونسبته $\frac{2}{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{6}$. g تسابه مستوى مباشر مركزه B ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{-\pi}{4}$.عين الشكل المركب لكل من التحويلين f و g

التمرين 7 :

نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بالنقطة $M(x' ; y')$ حيث :

$$\begin{cases} x' = ax - by + \alpha \\ y' = bx + ay + \beta \end{cases}$$

وحيث β , α , b , a أعداد حقيقية غير معدومة معطاة.

1) نسمي Z و Z' لاحقتي M و M' على الترتيب.

عبر عن Z' بدلالة Z . ثم بين أن f تشابه يطلب تعيين نسبته

2) نفرض $a = -\sqrt{3}$ و $b = -1$ و $\alpha = \beta = 0$

عين العناصر المميزة للتشابه f .

3) نعتبر متتالية النقط :

$M_0(1 ; 0)$, $M_1 = f(M_0)$, $M_2 = f(M_1)$, ... , $M_{\dots} = f(M_{\dots})$

ونسمي (x_n , y_n) احداثيي M_n .

بين أن M_n هي صورة M_0 بتشابه يطلب تعيينه ثم استنتج عبارتي x_n و y_n بدلالة n .

التمرين 8 :

1- لتكن $M(x ; y)$ نقطة في المستوي و لتكن $M'(x' ; y')$ نظيرتها بالنسبة لمحور الفواصل . أكتب x' , y' بدلالة x , y

نفرض أن Z , Z' لاحقتي M و M' عل الترتيب.- أكتب Z' بدلالة $\bar{Z}$.

2- ليكن التحويل النقطي f الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z'

بحيث : $Z' = 4iZ + 2 - 8i$

ماهي طبيعة التحويل f وماهي عناصره المميزة.

3- نعتبر التحويل النقطي g الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z'

بحيث : $Z' = 4i\bar{Z} + 2 - 8i$.- بين أن g هو مركب تحويلين يطلب تعيينهما.

التمرين 9 :

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $2Z^2 - (1 + 5i)Z + 2(i - 1) = 0$

نعتبر النقط A , B , C التي لواحقها Z_1 , Z_2 , Z_3 عل الترتيب حيث : $Z_1 = 2i$ و

$$Z_2 = \frac{1}{2}(1 + i) \quad \text{و} \quad Z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

2) بين أن : $\left(\sqrt{2} . Z_2\right)^{2008} + \left(\frac{1}{2} Z_1\right)^{1429} + \left(\sqrt{2} Z_3\right)^{1962} = i$

3) عين التشابه S الذي مركزه O ويحول B إلى A .4) عين الدوران R الذي مركزه O ويحول B إلى C .5) عين صورة المستقيم (OC) بهذا الدوران.

التمرين 10 :

نعتبر المعادلة : $(1) \ldots Z^3 - (1 + 5i)Z^2 - 9Z - 1 + 5i = 0$

1) بين أن هذه المعادلة تقبل حلا تخيليا صرفا Z_0

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة.حيث Z_0 , Z_1 , Z_2 حلولها حيث : $|Z_0| < |Z_1| < |Z_2|$ ولتكن النقط A , B , C التي لواحقها Z_0 , Z_1 , Z_2 على الترتيب.

3) ليكن S التشابه المستوى المباشر حيث : $S(A) = A$ و $S(C) = B$ و $S(M) = M'$

حيث M و M' نقطتان لاحقتاهما Z و Z' على الترتيب .

أكتب Z' بدلالة Z . ثم عين العناصر المميزة للتشابه.

الحلول

التمرين 1 :

1) × 2) × 3) √ 4) √

5) √ 6) × 7) √ 8) √

التمرين 2 :

- كتابة Z' بدلالة Z : لدينا : $Z' = aZ + b$ حيث : $a = 2.\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ومنه : $a = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$. إذن : $a = \sqrt{3} + i$

ولدينا لاحقة المركز : $Z_0 = \frac{b}{1 - a}$ أي $Z_0 = \frac{b}{1 - \sqrt{3} - i}$

لكن $Z_0 = 3 + i$ ومنه $3 + i = \frac{b}{1 - \sqrt{3} - i}$ إذن $b = (3 + i)(1 - \sqrt{3} - i)$

أي $b = 3 - 3\sqrt{3} - 3i + i - i\sqrt{3} + 1$ إذن $b = 4 - 3\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})i$

وعليه : $Z' = (\sqrt{3} + i)Z + 4 - 3\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})i$

- الشكل الأسي : لدينا : $a = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{6}\right)$ ومنه : $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

وبالتالي : $Z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}} Z + 4 - 3\sqrt{3} - i\left(2 + \sqrt{3}\right)$

- كتابة x' , y' بدلالة x , y :

لدينا : $Z' = \left(\sqrt{3} + i\right) Z + 4 - 3\sqrt{3} - i\left(2 + \sqrt{3}\right)$

ومنه : $x' + iy' = \left(\sqrt{3} + i\right)\left(x + iy\right) + 4 - 3\sqrt{3} - i\left(2 + \sqrt{3}\right)$

$$x' + iy' = x\sqrt{3} + i\sqrt{3}y + xi - y + 4 - 3\sqrt{3} - i\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

$$x' + iy' = x\sqrt{3} - y + 4 - 3\sqrt{3} + i\left(y\sqrt{3} + x - 2 - \sqrt{3}\right)$$

وبالتالي : $\begin{cases} x' = x\sqrt{3} - y + 4 - 3\sqrt{3} \\ y' = x + y\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} \end{cases}$

التمرين 3 : ---

- كتابة Z' بدلالة Z : $Z' = x' + iy'$

$$Z' = 4(x - y) + i\left[4(x + y) + 1\right] = 4x - 4y + i\left(4x + 4y + 1\right)$$

$$Z' = 4x - 4y + 4ix + 4iy + i = 4x + 4iy + 4ix - 4y + i$$

$$Z' = 4(x + iy) + 4ix + 4i^2y + i = 4Z + 4i\left(x + iy\right) + i$$

$$Z' = 4Z + 4iZ + i = (4 + 4i)Z + i$$

طبيعة f : لدينا : $Z' = aZ + b$ حيث $|a| = 4\sqrt{2}$, $\arg(a) = \frac{\pi}{4}$

ومنه f تشابه مستوى مباشر نسبته $4\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ومركزه النقطة ω ذات اللاحقة

$Z_0 = \frac{b}{1 - a}$ أي : $Z_0 = \frac{i}{1 - 4 - 4i}$ ومنه $Z_0 = \frac{i}{-3 - 4i}$

$Z_0 = \frac{i(-3 + 4i)}{(-3 - 4i)(-3 + 4i)}$ وبالتالي : $Z_0 = \frac{-3i - 4}{9 + 16}$

وبالتالي : $Z_0 = \frac{-4}{25} - \frac{3}{25}i$ ومنه : $\omega\left(\frac{-4}{25} ; \frac{-3}{25}\right)$

التمرين 4 : ---

تعيين طبيعة f :

لدينا $Z' = aZ + b$ حيث $|a| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2}$ أي : $|a| = 4$

وعليه f تشابه نسبته 4 .

تعيين زاويته : θ زاويته هي عمدة a ومنه $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ و منه $\theta = \frac{4\pi}{3}$

تعيين مركز التشابه :

ω مركز التشابه و لاحقتها $Z_0 = \frac{b}{1 - a}$ ومنه : $Z_0 = \frac{-2 - i\sqrt{3}}{1 + 2 + 2\sqrt{3}\,i}$

أي : $Z_0 = \frac{-2 - i\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}\,i}$ ومنه : $Z_0 = \frac{\left(-2 - i\sqrt{3}\right)\left(3 - 2\sqrt{3i}\right)}{\left(3 + 2\sqrt{3}\,i\right)\left(3 - 2\sqrt{3}\,i\right)}$

ومنه : $Z_0 = \frac{-6 + 4\sqrt{3}\,i - 3i\sqrt{3} - 6}{9 + 12}$ أي $Z_0 = \frac{-12 + \sqrt{3}\,i}{21}$

وبالتالي : $Z_0 = \frac{-4}{7} + \frac{\sqrt{3}}{21}i$

- الشكل الأسي : $Z' = aZ + b$

لدينا : $a = 4\left[\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right]$ ومنه $a = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$

وبالتالي : $Z' = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}Z - 2 - i\sqrt{3}$

التمرين 5 : ---

نفرض نقطة M لاحقتها Z وصورتها بهذا التشابه هي النقطة M' ذات اللاحقة Z' :

لدينا : $Z' = aZ + b$ مع a و b عددان مركبان .ولدينا : $S(A) = A'$ ومنه : $-11 - 14i = a + b$ ولدينا أيضا $S(B) = B'$ ومنه : $-3 + 5i = a(5 + i) + b$

بالطرح نجد : $-11 - 14i + 3 - 5i = a(1 - 5 - i)$ ومنه : $-8 - 19i = a(-4 - i)$

إذن : $a = \frac{(-8 - 19i)(-4 + i)}{(-4 - i)(-4 + i)}$ أي أن : $a = \frac{32 - 8i + 76i + 19}{16 + 1} = \frac{51 + 68i}{17}$

وبالتالي: $a = 3 + 4i$ ولدينا: $b = -11 - 14i - a$ أي : $b = -11 - 14i - 3 - 4i$

أي أن: $b = -14 - 18i$ إذن : $Z' = (3 + 4i)Z - 14 - 18i$ إذن S تشابه نسبته $|a|$ أي 5

التمرين 6 : ---

gof هو تشابه . الشكل المركب للتحويل f :لدينا : $Z' = aZ + b$ حيث

$$a = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ومنه : $a = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2}\right)$ ومنه : $a = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$

ولدينا $f(A) = A$ ومنه لاحقة A هي : $Z_0 = \frac{b}{1 - a}$

أي $1 + i = \frac{b}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i}$ إذن $b = (1 + i)\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i\right)$

أي أن : $b = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i - \frac{i\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}$

$$b = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)i = \frac{1}{3}\left[4 - \sqrt{3} + i\left(2 - \sqrt{3}\right)\right]$$

إذن : $Z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i\right)Z + \frac{1}{3}\left[4 - \sqrt{3} + i\left(2 - \sqrt{3}\right)\right]$

الشكل المركب للتحويل f :

$a = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]$ حيث $Z' = aZ + b$

أي أن : $a = \frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}$ و لدينا لاحقة المركز B هي : $\frac{b}{1 - a}$ ومنه :

وبالتالي $-1 + 2i = \frac{b}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}}$: $b = (-1 + 2i)\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ومنه $b = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + 2i - \sqrt{2}i - \sqrt{2}$

$$b = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\right)$$

إذن : $Z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\right)$

التمرين 7 : ---

كتابة Z' بدلالة Z :

$$Z' = x' + iy' = (ax - by + \alpha) + i(bx + ay + \beta)$$

$$Z' = ax - by + \alpha + ibx + iay + i\beta = ax + iay + ibx - by + \alpha + i\beta$$

$$Z' = ax + iay + ibx - by + \alpha + i\beta = a(x + iy) + ibx + i^2by + \alpha + i\beta$$

$$\ldots(x + iy) + \alpha + i\beta = az + ibZ + \alpha + i\beta$$

$Z' = (a + ib)Z + \alpha + i\beta$ وعليه f تشابه نسبته $k = \sqrt{a^2 + b^2}$

2) من أجل $a = -\sqrt{3}$, $b = -1$, $\alpha = \beta = 0$

فإن : $Z' = (-\sqrt{3} - i)Z$ وعليه $k = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ نسبة التشابه

مركز التشابه هو O وزاوية التشابه θ هي عمدة $(-\sqrt{3} - i)$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-1}{2} \end{cases}$$ ومنه : $\theta = \frac{5\pi}{6}$

- لدينا : $M_1 = f(M_0)$ و $M_2 = f(M_1)$

ومنه : $M_2 = f[f(M_1)]$ أي $M_2 = (f0f)(M_0)$

وكذلك : $M_3 = f(M_2)$ أي $M_3 = f[(f0f)(M_0)]$

إذن : $M_3 = [f0(f0f)](M_0)$ وبالتالي : $M_n = (f0f0\ldots0f)(M_0)$

لدينا $f0f$ هو تشابه مركزه O ونسبته $2^2 = 4$ وزاويته $2 \times \frac{5\pi}{6}$ أي $\frac{5\pi}{3}$.

$f0f0f$ هو تشابه نسبته $2^3 = 8$ وزاويته $3 \times \frac{5\pi}{6}$ أي $\frac{5\pi}{2}$

وعليه : $f0f0\ldots0f$ هو تشابه نسبته 2^n وزاويته $n \times \frac{5\pi}{2}$ أي $\frac{5\pi n}{2}$

إذن : $Z'_n = 2^n\left(\cos\frac{5\pi n}{6} + i\sin\frac{5\pi n}{6}\right)Z_0$

إذن : $Z'_n = 2^n\left(\cos\frac{5\pi n}{6} + i\sin\frac{5\pi n}{6}\right)$:
$$\begin{cases} x_n = 2^n\cos\frac{5\pi n}{6} \\ y_n = 2^n\sin\frac{5\pi n}{6} \end{cases}$$

ويبرهن بالتراجع.

التمرين 8 : ------------------------------------

1- كتابة x' و y' بدلالة x , y :

لدينا : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ ومنه : $Z' = x' + iy'$ أي $Z' = x + iy$

إذن : $Z' = \bar{Z}$

2- طبيعة f : f هو تشابه نسبة $k = |4i|$. إذن : $k = 4$ وزاويته عمدة k أي زاوية التشابه $\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة ω ذات اللاحقة Z_0 حيث : $Z_0 = \frac{2 - 8i}{1 - 4i} = \frac{2(1 - 4i)}{1 - 4i}$

ومنه : $Z_0 = 2$

- تبيان أن g هو مركب تحويلين :

g هي مركب التناظر الذي محوره $(x'x)$ و التشابه f

لأن : $M(Z) \xrightarrow{S_x} M_1(Z_1) \xrightarrow{S} M'(Z')$

$Z' = 4iZ_1 + 2 - 8i$ $\quad Z_1 = \bar{Z}$

ومنه : $Z' = 4i\bar{Z} + 2 - 8i$ إذن : $g = SoS_x$ حيث $S = f$

التمرين 9 : ------------------------------------

1) حل المعادلة : $2Z^2 - (1 + 5i)Z + 2(i - 1) = 0$

$\Delta = (1 + 5i)^2 - 4 \times 2(2i - 2)$ ومنه : $\Delta = -8 - 6i$

- نحسب الجذرين التربيعيين للعدد المركب Δ :

ليكن $\delta = x + iy$ جذرا تربيعيا للعدد Δ فيكون $\delta^2 = \Delta$ ومنه :

وعليه: $\begin{cases}(x+iy)^2 = -8-6i \\ |\delta|^2 = |\Delta|\end{cases}$ $\begin{cases} x^2-y^2=-8 \dots (1)\\ 2xy=-6\dots(2) \\ x^2+y^2=10\dots(3)\end{cases}$ بجمع (1) و (3)

نجد: $2x^2=2$ ومنه $x^2=1$ وعليه $x=1$ أو $x=-1$

لما $y=-3 : x=1$ ولما $y=3 : x=-1$

إذن: Δ له جذرين تربيعيين $\delta_1 = 1-3i$, $\delta_2=-1+3i$

• للمعادلة حلين متمايزين:

$Z' = \frac{1+5i-1+3i}{4}$, $Z''=\frac{1+5i+1-3i}{4}$ ومنه

: $Z'=2i$, $Z''=\frac{1}{2}+\frac{1}{2} i$

2) تبيان أن: $(\sqrt{2} . Z_2)^{2008} + \left(\frac{1}{2} Z_1\right)^{1429} + (\sqrt{2} . Z_3)^{1962} = i$

$Z_2 = \frac{1}{2}(1+i)$ ومنه: $|Z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، θ_2 عمدة Z_2 $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

ومنه: $\theta_2=\frac{\pi}{4}$ وعليه: $Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$ وبالتالي:

$(\sqrt{2} Z_2)^{2008} = \cos 502\pi + i\sin 502\pi$ أي: $(\sqrt{2} Z_2)^{2008}=1$

$Z_1 = 2i$ ومنه: $Z_1=2$ وعمدة Z_1 هي $\frac{\pi}{2}$

إذن: $Z_1 = 2\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$ وعليه $\frac{1}{2} Z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}$

$\left(\frac{1}{2} Z_1\right)^{1429} = \cos\frac{2007\pi}{2} + i\sin\frac{2007\pi}{2}$ وعليه:

$\left(\frac{1}{2} Z_1\right)^{1429} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+714\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+714\pi\right)$

ومنه: $\left(\frac{1}{2} Z_1\right)^{1429} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$\sqrt{2} Z_3 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ إذن: $\sqrt{2} Z_3 = i$ ومنه $Z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} i$

$(\sqrt{2} Z_3)^{1962} = \cos\frac{1962\pi}{2} + i\sin\frac{1962\pi}{2} = \cos 961\pi + i\sin 961\pi$

$= \cos(\pi+960\pi) + i\sin(\pi+960)$

$(\sqrt{2} Z_3)^{1962} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

وعليه: $(\sqrt{2} Z_2)^{2008} + \left(\frac{1}{2} Z_1\right)^{1429} + (\sqrt{2} Z_3)^{1962} = 1+i-1=i$

3- التشابه S:

العبارة المركبة للتشابه هي: $Z'=aZ$ لأن المركز هو O. ومنه بما أن: $S(B)=A$

فإن: $Z_1 = aZ_2$ إذن: $2i = a.\left(\frac{1}{2}\right)(1+i)$ وعليه: $i = a.(1+i)$

وبالتالي: $a=\frac{i}{1+i}$ أي: $a=\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}$ أي أن: $a=\frac{i+1}{2}$

$a = \frac{1}{2}(1+i)$ وعليه $Z'=\frac{1}{2}(1+i)Z$ نسبة التشابه: $k=|a|=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

زاوية التشابه θ هي : عمدة a وعليه : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ومنه : $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

4) تعيين الدوران R :

العبارة المركبة للدوران هي : $Z' = aZ$ (المركز هو O) وبما أن : $R(B) = C$ فإن :

$Z_3 = aZ_2$ وبالتالي : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}i = a \cdot \dfrac{1}{2}(1+i)$ أي $a = \dfrac{\sqrt{2}\,i}{1+i}$

ومنه : $a = \dfrac{\sqrt{2}\,i\,(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$: $Z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,Z$

زاوية الدوران θ' هي عمدة a وعليه : $\begin{cases} \cos\theta' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta' = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ وبالتالي : $\theta' = -\dfrac{\pi}{4}$

5) صورة المستقيم (OC) بالدوران : بما أن صورة المستقيم بالدوران هي مستقيم فإننا نعين صورتي O و C بهذا الدوران .صورة النقطة O بهذا الدوران هي O لأن مركز الدوران هو O،

نعين صورة النقطة C حيث لاحقتها $\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ وعليه نفرض C' صورتها فيكون :

$Z_{C'} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ أي $Z_{C'} = \dfrac{1}{2}(i+1)$. إذن $C'\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$

ومنه صورة المستقيم (OC) هي المستقيم (OC') حيث $C'\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$.

التمرين 10 : --

1) تبيان أن المعادلة تقبل حلا تخيليا صرفا Z_0 :

نضع $Z_0 = i\beta$ فنجد : $(i\beta)^3 - (1+5i)(i\beta)^2 - 9(i\beta) - 1 + 5i = 0$

$-i\beta^3 + (1+5i)\beta^2 - 9i\beta - 1 + 5i = 0$ ومنه $-i\beta^3 + \beta^2 + 5i\beta^2 - 9i\beta - 1 + 5i = 0$

وبالتالي : $\beta^2 - 1 + i\left(-\beta^3 + 5\beta^2 - 9\beta + 5\right) = 0$

وعليه : $\begin{cases} \beta^2 - 1 = 0 \ldots (1) \\ -\beta^3 + 5\beta^2 - 9\beta + 5 = 0 \end{cases}$ حل (1) هي $\beta = 1$ أو $\beta = -1$

بالتعويض في (2) نجد : $\beta = 1$ تحقق المعادلة . ومنه : $\beta = 1$ إذن : $Z_0 = i$

2) العبارة : $Z^3 - (1+5i)Z^2 - 9Z - 1 + 5i$ وتكافئ

$(Z-i)\left(aZ^2 + bZ + c\right)$ أي : $aZ^3 + bZ^2 + cZ - aiZ^2 - biZ - ci$

أي $aZ^3 + (b - ai)Z^2 + (c - bi)Z - ci$

وعليه : $\begin{cases} a = 1 \\ b - ai = -1 - 5i \\ c - bi = -9 \\ -ci = -1 + 5i \end{cases}$ أي أن : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 - 4i \\ c = \dfrac{-1+5i}{-i} \end{cases}$ أي أن : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 - 4i \\ c = -i - 5 \end{cases}$

وعليه العبارة تصبح : $(Z-i)\left(Z^2 - (1+4i)Z + i + 5\right)$

وعليه المعادلة تكافئ : $(Z-i)\left(Z^2 - (1+4i)Z - i - 5\right) = 0$

وهي تكافئ : $Z - i = 0$ أو $Z^2 - (1+4i)Z - i - 5 = 0$

وبالتالي : $Z = i$ أو $Z^2 - (1+4i)Z - i - 5 = 0$

لحل المعادلة : $Z^2 - (1+4i)Z - i - 5 = 0$:

$\Delta = (1+4i)^2 + 4(i+5)$ ومنه : $\Delta = 5 + 12i$

نبحث عن الجذرين التربيعيين للعدد Δ .

ليكن δ جذر تربيعي للعدد Δ : أي $\delta^2 = \Delta$

نفرض $\delta = x + iy$ فيكون :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \ldots (1) \\ 2x\,y = 12 \ldots (2) \\ x^2 + y^2 = 13 \ldots (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (3) نجد : $2x^2 = 18$ ومنه $x^2 = 9$ أي $x = 3$ أو $x = -3$

لما $x = 3$: $y = 2$ و لما $x = -3$: $y = -2$

ومنه $\delta_1 = 3 + 2i$ و $\delta_2 = -3 - 2i$

وعليه للمعادلة حلين متمايزين. $Z' = \dfrac{1+4i-3-2i}{2}$, $Z'' = \dfrac{1+4i+3+2i}{2}$

إذن : $Z' = -1 + i$, $Z'' = 2 + 3i$

$|Z'| = \sqrt{2}$ و $|Z''| = \sqrt{13}$ وعليه : $Z_0 = i$, $Z_1 = -1 + i$, $Z_2 = 2 + 3i$

3- كتابة Z' بدلالة Z : لدينا $Z' = aZ + b$

بما أن $S(A) = A$ فإن : $Z_0 = aZ_0 + b$ ومنه : $i = ai + b$ ومنه :

$b = i - ia \ldots (2)$. وبما أن : $S(C) = B$ فإن : $Z_1 = aZ_2 + b$

إذن : $-1 + i = a(2+3i) + b \ldots (3)$

نعوض b بقيمتها من (2) في (3) فنجد : $-1 + i = a(2+3i) + i - ia$

وعليه : $-1 = a(2+2i)$ وبالتالي : $a = \dfrac{-1}{2+2i} = \dfrac{-1(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}$

إذن : $a = \dfrac{-2+2i}{8}$ وعليه $a = +\dfrac{1}{4}(-1+i)$ وبالتالي :

$b = i - i\left(\dfrac{-1}{4} + \dfrac{1}{4}i\right)$ أي : $b = \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{4}i$ ومنه :

$$Z' = \frac{1}{4}(-1+i)Z + \frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$$

$|a| = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ وعليه نسبة التشابه هي $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ عمدة a هي θ حيث :
$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

ومنه : $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ ومنه مركز التشابه هو A ونسبته $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ و زاويته $\dfrac{3\pi}{4}$

13- الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

1- مراجعة الجداء السلمي في المستوى :

تعريف 1 :

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين في المستوي (P) لدينا : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

- إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فإن : $\vec{u}.\vec{v}=0$
- إذا كان $\vec{u}.\vec{v}=0$ فإن : $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ أو $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان
- (المربع السلمي) $\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{w}\|^2$

مبرهنة 1 :

نفرض في المستوى : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}, \vec{v}=\overrightarrow{AC}$ و H المسقط العمودي للنقطة C على (AB)

1) إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ في نفس الاتجاه : $\vec{u}.\vec{v}=AB.AH$

2) إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ مختلفين في الاتجاه فإن : $\vec{u}.\vec{v}=-AB.AH$

و في الحالتين : $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

مبرهنة 2 :

لتكن $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ أشعة في المستوى P. k عدد حقيقي :

1) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$. 2) $(k\vec{u}).\vec{v}=k(\vec{u}.\vec{v})$

3) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

نتائج : 1) $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$. 2) $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

3) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

مبرهنة 3 :

ليكن $(o;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس في المستوى (P) و ليكن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ حيث إحداثياها (x,y) و $(x';y')$ على الترتيب:لدينا : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$

نتيجة : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

تعريف 2 :

كل شعاع غير معدوم و عمودي على المستقيم (Δ) يسمى الشعاع الناظمي للمستقيم (Δ) فإذا كان الشعاع $\vec{u}(a;b)$ شعاع ناظمي للمستقيم (Δ) فإن معادلة (Δ) تكون من الشكل : $ax+by+c=0$.

مبرهنة 4 :المسافة بين النقطة $M(\alpha;\beta)$ و المستقيم (Δ) الذي معادلته : $ax+by+c=0$ تعطى بالعبارة : $\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2- المسقط العمودي على مستقيم و على مستو :

أ) المسقط العمودي على مستقيم :

تعريف 3 :

نسمي المسقط العمودي للنقطة M على مستقيم (D) النقطة M' ، تقاطع المستقيم (D) و المستوي (P') الذي يحتوي M و يعامد (D). إذا كان $M\in(D)$ فإن $M'=M$

ب) المسقط العمودي على مستو :

تعريف 4 :

نسمي مسقطا عموديا للنقطة N على المستوى (P) النقطة N' وهي تقاطع (P) و المستقيم (Δ) الذي يشمل N و يعامد المستوى (P). إذا كان $N\in(P)$ فإن $N'=N$

3- تعريف و خواص الجداء السلمي في الفضاء :

تعريف 5 :

الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الفضاء هو الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في المستوى الذي يحتوي على هذين الشعاعين.

- إذا كان $\vec{u}.\vec{v}=0$ فإن هذين الشعاعين متعامدين
- إذا كان للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}'$ نفس الحامل و كان : $\vec{u}.\vec{v}'=\vec{u}.\vec{v}$

نقول أن $\vec{v}'$ هو المسقط العمودي لـ $\vec{v}$ على $\vec{u}$.

نتائج :

- إذا لم يكن للشعاعين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ نفس الحامل فإنهما يعينان مستويا وحيدا (ABC)

ومنه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos B\hat{A}C=AB.AH$

حيث H هو المسقط العمودي للنقطة C على (AB)

- إذا كان للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ نفس الحامل و كانا غير معدومين فإنهما يعينان مستقيما (AB)

و يكون في حالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ في نفس الاتجاه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC$

و في حالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مختلفين في الاتجاه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB.AC$

مبرهنة 5 :

إذا كانت $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ ثلاثة أشعة في الفضاء و كان k عدد حقيقيا فإن :

- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
- $(k\vec{u}).\vec{v}=k.(\vec{u}.\vec{v})=\vec{u}.(k\vec{v})$

تعريف 6 :

كل شعاع غير معدوم عمودي على شعاعين ليس لهما نفس الحامل من مستو (P) يسمى شعاع الناظمي للمستوى (P) .

4- العبارة التحليلية للجداء السلمي :

مبرهنة 6 :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ليكن الشعاعان :

$\vec{u}(x ; y ; z)$ و $\vec{v}(x' ; y' ; z')$ لدينا : $\vec{u} . \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

ملاحظات :

$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ومنه : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

إذا كانت $A(x_0 ; x_0 ; z_0)$, $B(x_1 ; y_1 ; z_1)$ في الفضاء فإن : المسافة بين A و B تعطى بالعبارة. $AB = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$

5- المعادلة الديكارتية لمستو في معلم متعامد متجانس :

تعريف 7 :

نسمي معادلة ديكارتية لمستو (P) العلاقة المحققة فقط من أجل إحداثيات كل نقط P.

مثال :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, k)$

المستوى $(o ; \vec{i}, \vec{j})$ هو مجموعة النقط $M(x ; y ; z)$ حيث : $z = 0$.

وعليه $z = 0$ هي معادلة ديكارتية لهذا المستوى $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

مبرهنة 7 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, k)$ كل مستو يمر من نقطة A من الفضاء و يعامد الشعاع $\vec{n}(a ; b ; c)$ يقبل معادلة من الشكل :

$ax + by + cz + d = 0$. الشعاع $\vec{n}(a ; b ; c)$ هو شعاع ناظمي للمستوي

و العكس كل معادلة من الشكل : $ax + by + cz + d = 0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية غير معدومة جميعا هي معادلة لمستو حيث $\vec{n}(a ; b ; c)$ هو شعاع ناظمي للمستوي

6- المسافة بين نقطة ومستقيم ثم و مستو :

تعريف 8 :

نسمي المسافة بين نقطة M و مستقيم (D) أو مستو (P) طول القطعة $[MH]$.

H هي المسقط العمودي للنقطة M على (D) أو على (P).

مبرهنة 8 :

ليكن P المستوى الذي يشمل النقطة A وشعاع ناظمه $\vec{n}$. لدينا : $MH = \dfrac{|\overrightarrow{AM} . \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

مبرهنة 9 :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ تعطى المسافة d بين النقطة $M(\alpha ; \beta ; \gamma)$ و المستوى (P) الذي معادلته $ax + by + cz + d = 0$ بالعبارة :

$$MH = d = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

التمارين

التمرين 1 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1- بين أن النقط $A(-1 ; 1 ; 0)$, $B(1 ; -1 ; 1)$, $C(0 ; 2 ; -1)$ تعين مستويا و حيدا.

2- بين أن الشعاع $\vec{u}(2 ; 6 ; 8)$ عمودي على المستوي (ABC)

التمرين 2 :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطة $A(1 ; 2 ; -3)$ و الشعاع $\vec{u}(-4 ; 2 ; 1)$.

1) أكتب معادلة المستوى (P) الذي يشمل A و يعامد $\vec{u}$.

2) أحسب المسافة بين النقطة $C(-1 ; 1 ; 1)$ و المستوى (P)

التمرين 3 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

(D) مستقيم يشمل النقطة $A(1 ; 1 ; -1)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(-1 ; 2 ; -2)$

$B(2 ; -2 ; 2)$ نقطة من الفضاء .أحسب المسافة بين B و (D) .

التمرين 4 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.وحدة القياس هي Cm

لتكن النقط : $A(1 ; 0 ; -1)$, $B(-1 ; 4 ; 1)$, $C(2 ; 3 ; 3)$, $D(2 ; 1 ; 5)$

1) بين أن الشعاع $\vec{u}(-1 ; 1 ; -1)$ عمودي على المستوى (ABC)

2) استنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) 3) بين أن ABCD هو رباعي أوجه.

4) أحسب مساحة المثلث ABC 5) أحسب المسافة بين النقطة D و المستوى (ABC)

6) أحسب حجم رباعي الأوجه ABCD.

التمرين 5 :

A و B نقطتان متمايزتان في الفضاء . I منتصف $[AB]$

1- ماهي المجموعة E_1 للنقطM من الفضاء بحيث $\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = 0$

2- ماهي المجموعة E_2 للنقط M من الفضاء بحيث $\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = \frac{1}{4} AB^2$

3- ماهي المجموعة E_3 للنقط M من الفضاء بحيث : $MA^2 + MB^2 = AB^2$

4- ماهي المجموعة E_4 للنقط M من الفضاء بحيث : $MA^2 - MB^2 = \frac{1}{2} AB^2$

التمرين 6 :

(P) مستو الذي معادلته: $Cx + y + z - 3 = 0$ والنقطة $A(c ; 2 ; 1)$, $C \in \mathbb{R}$

عين العدد C بحيث تكون المسافة d بين a و (P) تساوي 3 .

التمرين 7 :

نعتبر الأشعة : $\vec{u}(1 ; 1 ; 1)$, $\vec{v}(13 ; -2 ; 3)$, $\vec{w}(1 ; 2 ; x)$ حيث x عدد حقيقي.

عين قيمة x بحيث يكون الشعاع $\vec{w}$ عمودي على كل من الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

التمرين 8 :

نعتبر الفضاء المزود بمعلم متعامد متجانس $(o ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ و الأشعة

$$\vec{u}\left(\frac{2}{11} ; \frac{6}{11} ; \frac{-9}{11}\right) , \vec{v}\left(\frac{6}{11} ; \frac{7}{11} ; \frac{6}{11}\right) , \vec{w}\left(\frac{-9}{11} ; \frac{6}{11} ; \frac{2}{11}\right)$$

1) أحسب كل من $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{v}\|$ و $\|\vec{w}\|$ 2) أحسب $\vec{u} . \vec{v}$, $\vec{u} . \vec{w}$, $\vec{v} . \vec{w}$

3) هل المعلم $(O ; \vec{u} , \vec{v} , \vec{w})$ متعامد متجانس.

التمرين 9 :

ليكن (P) المستوى الذي معادلته : $x - 2y + 4z - 2 = 0$

1- أكتب معادلة المستوى (P') الذي يشمل النقطة $A(-1 ; 2 ; 1)$ و يوازي (P)

2- أحسب المسافة بين النقطة $C(1 ; -2 ; 3)$ و كل من المستويين (P) و (P')

التمرين 10 :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ نعتبر النقط

$$A(-1 ; 2 ; 3) , B(-5 ; 2 ; 1) , C(0 ; 1 ; -2)$$

1) عين المعادلة الديكارتية للمجموعة E_1 للنقط $M(x ; y ; z)$ بحيث: $2MA^2 + 3MB^2 = 5$

2) عين المعادلة الديكارتية للمجموعة E_2 للنقط $M(x ; y ; z)$ بحيث $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{BC} = -4$

الحلول

التمرين 1 :

1- تبيان أن النقط A B , C تعين مستويا :

لدينا $\overrightarrow{AB}(2 ; -2 ; 1)$ و $\overrightarrow{AC}(1 ; 1 ; -1)$. الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليس لهما نفس الحامل لأن إحداثيات $\overrightarrow{AB}$ ليست متناسبة مع إحداثيات $\overrightarrow{AC}$ فمثلا : $\frac{2}{1} \neq \frac{-2}{1}$

و عليه فهي تشكل مستويا وحيدا (ABC)

2- تبيان أن $\vec{u}(2 ; 6 ; 8)$ عمودي على المستوى (ABC)

لدينا : $\vec{u} . \overrightarrow{AB} = 2(2) + 6(-2) + 8(1) = 0$

$\vec{u} . \overrightarrow{AC} = 2(1) + 6(1) + 8(-1) = 0$

ومنه الشعاع $\vec{u}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ من المستوى (ABC) وعليه $\vec{u}$ عمودي على المستوى (ABC) .

التمرين 2 :

1) المستوى (P) هو مجموعة النقط $M(x ; y ; z)$ بحيث : $\overrightarrow{AM} \perp \vec{u}$ ومنه :

$\overrightarrow{AM} . \vec{u} = 0$

لكن $\overrightarrow{AM}(x - 1 ; y - 2 ; z + 3)$ و $\vec{u}(-4 ; 2 ; 1)$

وبالتالي : $-4(x) + 2(y - 2) + z + 3 = 0$ أي $-4x + 4 + 2y - 4 + z + 3 = 0$

ومنه : $-4x + 4 + 2y - 4 + z + 3 = 0$

وعليه معادلة المستوى (P) هي : $-4x + 2y + z + 3 = 0$

2) المسافة بين C و (P) :

$$d = \frac{-4(-1) + 2(1) + 1 + 3}{\sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (1)^2}}$$

$$d = \frac{4 + 2 + 4}{\sqrt{16 + 4 + 1}} = \frac{10}{\sqrt{21}} = \frac{10\sqrt{21}}{21}$$

التمرين 3 :

حساب المسافة بين B و D :لتكن H المسقط العمودي للنقطة B على D

لدينا $\overrightarrow{AB}(1 ; -3 ; 3)$ و $\vec{u}(-1 ; 2 ; -2)$

ومنه من جهة :

$$\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}\right| = \left|(-1)(1)+2(-3)+(-2)(3)\right| = |-13| = 13 \ldots (1)$$

ومن جهة أخرى : $\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}\right| = \left|\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}\right| = \left\|\vec{u}\right\| . AH$

وعليه :

$$\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}\right| = \sqrt{(-1)^2+(2)^2+(2)^2} \times AH = 3 . AH \ldots (2)$$

من (1) و (2) : $3AH = 13$ وعليه : $AH = \frac{13}{3}$

في المثلث ABH القائم في H لدينا : $AB^2 = AH^2 + BH^2$

ومنه : $BH^2 = AB^2 - AH^2$ لكن : $AB^2 = (1)^2 + (-3)^2 + (3)^2 = 19$

وعليه : $BH^2 = 19 - \left(\frac{13}{3}\right)^2 = 19 - \frac{169}{9}$ ومنه : $BH^2 = \frac{2}{9}$ أي $BH = \frac{\sqrt{2}}{3}$

التمرين 4 : --

1- بيان أن : $\vec{u}$ عمودي على المستوى ABC لدينا $\overrightarrow{AC}(1\,;3\,;4)$, $\overrightarrow{AB}(-2\,;4\,;2)$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = (-2)\times 1 + 4\times 1 + 2\times(-1) = -2+4-2 = 0$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{v} = 1\times 1 + 3\times 1 + 4(-1) = 0$$

ومنه $\vec{u}$ عمودي على كل من الشعاعين الذين ليس لهما نفس الحامل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وعليه فهو عمودي على المستوى (ABC).

2- استنتاج معادلة (ABC) :

المستوى (ABC) هو مجموعة النقط $M(x\,;y\,;z)$ حيث :

$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 0$, $\overrightarrow{AM}(x-1\,, y\,, z+1)$ ومنه : $1(x-1) + 1.y + (-1)(z+1) = 0$

إذن : $x - 1 + y - z - 1 = 0$ وعليه : $x + y - z - 2 = 0$

3- تبيان أن ABCD هو رباعي أوجه :

وذلك بتبيان أن D لا تنتمي إلى (ABC) حيث $D(2\,;1\,;5)$ $2+1-5-2=-4$.

ومنه : D ليست نقطة من (ABC) وبالتالي ABCD هو رباعي وجوه.

4- مساحة المثلث ABC : لدينا

$$\left|\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}\right| = BC . BH = BH . \sqrt{14} \ldots (1)$$

حيث : $\overrightarrow{BC}(3\,;-1\,;2)$ إذن : $BC = \sqrt{(3)^2+(-1)^2+(2)^2} = \sqrt{14}$

ومن جهة أخرى : لدينا : $\overrightarrow{BC}(3\,;-1\,;2)$, $\overrightarrow{BA}(2\,;-4\,;-2)$ وعليه :

$$\left|\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}\right| = \left|3\times 2 + (-1)(-4) + 2(-2)\right| = 6 \ldots (2)$$

من (1) و (2) : $BH . \sqrt{14} = 6$ ومنه : $BH = \frac{6}{\sqrt{14}}$

أي: $BH = \frac{6\sqrt{14}}{14}$ أي $BH = \frac{3\sqrt{14}}{7}$ حيث $AB^2 = (-2)^2 + (4)^2 + 2^2$

ومنه : $AB^2 = 24$ أي : $AH^2 = AB^2 - BH^2$ وعليه

$$AH^2 + (24) - \left(\frac{3\sqrt{14}}{7}\right)^2 = 24 - \frac{126}{49} = \frac{1050}{49}$$

إذن : $AH = \frac{\sqrt{1050}}{7}$ ومنه ارتفاع المثلث ABC هو $\frac{\sqrt{1050}}{7}\,Cm$

إذن S مساحة المثلث ABC هي : $S = \frac{BC . AH}{2} = \frac{\sqrt{1050}\times\sqrt{14}}{2\times 7}$

لأن : $BC = \sqrt{14}$, $AH = \frac{\sqrt{1050}}{7}$ وبالتالي:

$$S = \frac{\sqrt{14700}}{14} = \frac{10\sqrt{147}}{14} = \frac{5\sqrt{147}}{7} = \frac{5\times 7\sqrt{3}}{7}$$

إذن: $S = 5\sqrt{3}\,Cm^2$

5- حساب المسافة بين D و (ABC) :

لتكن I المسقط العمودي للنقطة D على (ABC) فيكون :

$DI = \frac{|2+1-5-2|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ ومنه المسافة بين D و (ABC) هي $DI = \frac{4\sqrt{3}}{3}\,Cm$

6- حجم رباعي الأوجه ABCD : لدينا: $V = \frac{1}{3} . s . h$ حيث S مساحة القاعدة و هي:

$S = 5\sqrt{3}$. h هو المسافة بين D و (ABC) أي $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

وعليه : $V = \frac{1}{3}\times 5\sqrt{3}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}$ وبالتالي : $V = \frac{5\times 3\times 4}{3} = 20\,Cm^3$

التمرين 5 : --

1- تعيين E_1 : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$

ومنه : $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=0$ ومنه $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)=0$

وعليه: $MI^2 - IA^2 = 0$ أي أن : $IM^2 = IA^2$ وبالتالي:

المجموعة E_2 هي سطح كرة مركزها I ونصف قطرها [IA] أي سطح كرة قطرها [AB] .

2- تعيين E_2 : لدينا $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}AB^2$ وعليه:

أي $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right) = \frac{1}{4}AB^2$: أي $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right) = \frac{1}{4}AB^2$

وعليه: $MI^2 - IA^2 = \frac{1}{4}AB^2$ أي: $MI^2 = IA^2 + \frac{1}{4}AB^2$ ومنه

$MI^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + \frac{1}{4}AB^2$ وبالتالي $IM^2 = \frac{1}{2}AB^2$

وعليه E_2 هي سطح كرة مركزها I و نصف قطرها $R = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$

3- تعيين E_3 : لدينا : $MA^2 + MB^2 = AB^2$ أي: $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 = AB^2$

وعليه $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)^2 = AB^2$ ومنه :

أي $\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 - 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 = AB^2$

وعليه: $2MI^2 + 2IA^2 = AB^2$ $2MI^2 = AB^2 - 2IA^2$

$MI^2 = \frac{1}{2}AB^2 - IA^2 = \frac{1}{2}AB^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}AB^2$

إذن : $IM^2 = \frac{1}{4}AB^2$ وعليه E_3 هي سطح كرة مركزها I ونصف قطرها $R = \frac{1}{2}AB$

4- تعيين E_4 : لدينا $MA^2 - MB^2 = \frac{1}{2}AB^2$ ومنه :

وبالتالي : $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 = \frac{1}{2}AB^2$

أي أن : $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)^2 = \frac{1}{2}AB^2$

$\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 - \left(MI^2 - 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2\right) = \frac{1}{2}AB^2$

إذن : $4 \times \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}AB^2$ وعليه : $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} = \frac{1}{8}AB^2$

$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} = \frac{1}{8}.(2IA)^2$ أي $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}IA^2$

نفرض : H المسقط العمودي للنقطة M على (AB) فيكون : $HI.IA = \frac{1}{2}IA^2$

ومنه : $HI = \frac{1}{2}IA$ وعليه المجموعة E_4 للنقطة M هي المستوى المحوري للقطعة [IB]

التمرين 6 :

تعيين C :

$d = \frac{|c.c+2+1-3|}{\sqrt{c^2+(1)^2+(1)^2}}$ ومنه $d = \frac{c^2}{\sqrt{c^2+2}}$

إذن بما أن $d = 3$ فإن : $\frac{c^2}{\sqrt{c^2+2}} = 3$ وعليه : $c^4 = 9\left(c^2+2\right)$

وعليه : $c^4 - 9c^2 - 18 = 0$ بوضع $c^2 = p$ نجد : $p^2 - 9p - 18 = 0$

ومنه $\Delta = (-9)^2 - 4(-18)$ ومنه : $\Delta = 153$

وعليه للمعادلة حلين : $p_1 = \frac{9-3\sqrt{17}}{2}$ و $p_2 = \frac{9+3\sqrt{17}}{2}$

لكن $c^2 = p$ ومنه : $p_1 < 0$ مرفوض . وعليه : $C^2 = \frac{9+3\sqrt{17}}{2}$

إذن : $C = \sqrt{\frac{9+3\sqrt{17}}{2}}$ أو $C = -\sqrt{\frac{9+3\sqrt{17}}{2}}$

التمرين 7 :

$\vec{w}.\vec{u} = 1\times1+2\times1+x\times1 = 3+x$

$\vec{w}.\vec{u} = 1\times13+2(-2)+x\times3 = 3x+9$

يكون $\vec{w}$ عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إذا وفقط إذا كان :

$\begin{cases} x+3=0 \\ 3x+9=0 \end{cases}$ ومنه : $x=-3$

التمرين 8 :

الأشعة $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ليس لها نفس الحوامل و لدينا :

(1

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{11}\right)^2 + \left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{-9}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+36+81}{121}} = \sqrt{\frac{121}{121}} = 1$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{\left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{7}{11}\right)^2 + \left(\frac{6}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{121} + \frac{49}{121} + \frac{36}{121}} = \sqrt{\frac{121}{121}} = 1$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{\left(\frac{-9}{11}\right)^2 + \left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{2}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{121} + \frac{36}{121} + \frac{4}{121}} = \sqrt{\frac{121}{121}} = 1$$

(2 $\vec{U} \cdot \vec{V} = \frac{2}{11} \times \frac{6}{11} + \frac{6}{11} \times \frac{7}{11} + \left(\frac{-9}{11}\right) \times \frac{6}{11} = \frac{12+42-54}{121} = 0$

$$\vec{U} \cdot \vec{W} = \frac{2}{11} \times \left(\frac{-9}{11}\right) + \frac{6}{11} \times \frac{6}{11} + \left(\frac{-9}{11}\right) \times \left(\frac{2}{11}\right) = \frac{-18+36-18}{121} = 0$$

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = \frac{6}{11} + \left(\frac{-9}{11}\right) + \frac{7}{11} \times \frac{6}{11} + \frac{6}{11} \times \frac{2}{11} = \frac{-54+42+12}{121} = 0$$

(3 بما أن $\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\| = \|\vec{W}\| = 1$ و $\vec{U} \perp \vec{V}$ و $\vec{U} \perp \vec{W}$

و $\vec{V} \perp \vec{W}$ فإن المعلم متعامد متجانس.

التمرين 9 :

1- معادلة (P) :

الشعاع: $\vec{n}(1 ; -2 ; 4)$ هو شعاع ناظمي للمستوى (P)

وبما أن (P') يوازي P فإن $\vec{n}$ هو أيضا شعاع ناظمي للمستوي (P').

ومنه معادلة (P') هي : $x - 2y + 4z + \alpha = 0$ و بما أن $A \in (P')$ فإن :

$-1 - 2(2) + 4(1) + \alpha = 0$ وعليه : $-1 + \alpha = 0$ أي أن : $\alpha = 1$

إذن معادلة (P') هي : $x - 2y + 4z + 1 = 0$

2- المسافة بين C و (P) :

$$d_1 = \frac{|1 - 2(-2) + 4(3) - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (4)^2}} = \frac{15}{\sqrt{21}} = \frac{15\sqrt{21}}{21}$$ أي $d_1 = \frac{5\sqrt{21}}{7}$

- المسافة بين C و (P') :

$$d_2 = \frac{|1 - 2(-2) + 4(3) + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (4)^2}} = \frac{18}{\sqrt{21}} = \frac{18\sqrt{21}}{21}$$ أي $d_2 = \frac{6\sqrt{21}}{7}$

1- تعيين E_1 :

نفرض $M(x ; y ; z)$

التمرين 10 :

لدينا $\overrightarrow{MA}(-1 - x ; 2 - y ; 3 - z)$, $\overrightarrow{MB}(-5 - x ; 2 - y ; 1 - z)$

وعليه :

$$MA^2 = (-1 - x)^2 + (2 - y)^2 + (3 - z)^2$$

$$MA^2 = 1 + 2x + x^2 + 4 - 4y + y^2 + 9 - 6z + z^2$$

$$MA^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 14$$

$$MB^2 = (-5 - x)^2 + (2 - y)^2 + (1 - z)^2$$

$$MB^2 = 25 + 10x + x^2 + 4 - 4y + y^2 + 1 - 2z + z^2$$

$$MB^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 4y - 2z + 30$$

ولدينا :

$$2MA^2 + 3MB^2 = 5$$

ومنه :

$$2\left(x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 14\right) + 3\left(x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 4y - 2z + 30\right) = 5$$

وعليه $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 34x - 20y - 18z + 118 = 5$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{34}{5}x - 4y - \frac{18}{5}z + \frac{118}{5} = 5$$

$$\left(x + \frac{17}{5}\right)^2 - \left(\frac{17}{5}\right)^2 + (y-2)^2 - (2)^2 + \left(z - \frac{9}{5}\right)^2 - \left(\frac{9}{5}\right)^2 + \frac{118}{5} = 5$$

$$\left(x + \frac{17}{5}\right)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{9}{5}\right)^2 = \frac{289}{25} + 4 + \frac{81}{25} - \frac{118}{5} + 5$$

$$\left(x + \frac{17}{5}\right)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{9}{5}\right)^2 = \frac{289 + 100 + 81 - 590}{25} + 5$$

$$\left(x + \frac{17}{5}\right)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{9}{5}\right)^2 = \frac{-120 + 125}{25}$$

$$\left(x + \frac{17}{5}\right)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{9}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

ومنه E_1 سطح كرة مركزها $\omega\left(\frac{-17}{5} ; 2 ; \frac{9}{5}\right)$ ونصف قطرها $\frac{1}{\sqrt{5}}$ أي $\frac{\sqrt{5}}{5}$

2- تعيين E_2 :

نفرض $M(x ; y ; z)$ ؛ لدينا : $\overrightarrow{AM}(x+1 ; y-2 ; z-3)$, $\overrightarrow{BC}(5 ; -1 ; -3)$

ولدينا :

$$\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{BC} = 5(x+1) + (y-2)(-1) + (z-3)(-3)$$
$$= 5x + 5 - y + 2 - 3z + 9 = 5x - y + 2z + 16$$

وعليه : بما أن : $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{BC} = -4$ فإن : $5x - y - 2z + 16 = -4$

إذن : $5x - y - 2z + 20 = 0$

ومنه E_2 هو مستو حيث $\vec{n}(5 ; -4 ; -2)$ شعاع ناظمي له .

14- المستقيمات و المستويات في الفضاء

I- التذكير بالمرجح :

تعريف 1 :

نسمي مرجح النقط : $A_1 , A_2 , \ldots , A_n$ المرفقة بالمعاملات : $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n$

بحيث $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$ النقطة الوحيدة G التي تحقق

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

مبرهنة 1 :

$$\{(A_1 , \alpha_1) ; (A_2 , \alpha_2) ; \ldots ; (A_n , \alpha_n)\}$$

فمن أجل كل نقطة M من الفضاء يكون

$$\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \overrightarrow{MG}$$

2) إذا كان G مرجح الجملة $\{(A , \alpha) ; (B , \beta) ; (C , \gamma)\}$ وكان K مرجح الجملة $\{(A , \alpha) ; (B , \beta)\}$ فإن G مرجح الجملة : $\{(K , \alpha + \beta) ; (C , \gamma)\}$

مبرهنة 2 :

لتكن A و B نقطتان متمايزتان و α و β عددان حيث $\beta + \alpha \neq 0$

مجموعة مراجح الجملة $\{(A , \alpha) ; (B , \beta)\}$ هي المستقيم (AB).

مجموعة مراجح الجملة $\{(A , \alpha) ; (B , \beta)\}$ هي القطعة $[AB]$ إذا كان α و β من نفس الإشارة.

ملاحظة :

لكي نبرهن أن ثلاث نقط على استقامة واحدة يكفي أن نبرهن أن إحداهما مرجح النقطتين المتبقيتين.

مبرهنة 3 :

لتكن A , B , C ثلاث نقط مختلفة و ليست على استقامة واحدة. α و β و γ أعداد حقيقية حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

مجموعة مراجح الجملة $\{(A , \alpha) ; (B , \beta) ; (C , \gamma)\}$ هي المستوي (ABC)

مجموعة مراجح الجملة $\{(A , \alpha) ; (B , \beta) ; (C , \gamma)\}$ هي الجزء من المستوى المحدد بالمثلث ABC إذا كان للأعداد α و β و γ نفس الإشارة.

II- التمثيل الوسيطي لمستقيم و لمستو :

فيما يلي الفضاء منسوب إلى معلم $(O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$

1- التمثيل الوسيطي لمستقيم :

مبرهنة 4 :

(D) مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c)$ ويشمل النقطة $A(\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma)$.

تكون نقطة M من المستقيم (D) إذا وفقط إذا حققت إحداثياها $(x\,;\,y\,;\,z)$ العلاقات :

$$\begin{cases} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{cases}$$

حيث t عدد حقيقي .

تعريف 2 :
العلاقات :

$$\begin{cases} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{cases}$$

تشكل تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل النقطة و شعاع توجيهه $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c)$. t هو الوسيط.

فمثلا :

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -5t - 4 \\ z = -\frac{1}{2}t + 1 \end{cases}$$

تشكل تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل النقطة $A(3\,;\,-4\,;\,1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}\left(2\,;\,-5\,;\,\frac{1}{2}\right)$

2- التمثيل الوسيطي لمستو :
مبرهنة 5 :
ليكن الشعاعان $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c)$, $\vec{v}(a'\,;\,b'\,;\,c')$ ولتكن النقطة $A(\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma)$.

وليكن المستوي (P) المزود بمعلم $(A\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$

تكون نقطة M نقطة من (P) إذا وفقط إذا حققت إحداثياها $(x\,;\,y\,;\,z)$ العلاقات :

$$\begin{cases} x = at + a't' + \alpha \\ y = bt + b't' + \beta \\ z = ct + c't' + \gamma \end{cases}$$

حيث $t\,,\,t'$ عددان حقيقيان.

تعريف 3 :
نقول عن العلاقات :

$$\begin{cases} x = at + a't' + \alpha \\ y = bt + b't' + \beta \\ z = ct + c't' + \gamma \end{cases}$$

أنها تشكل تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل $A(\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma)$ وشعاعي توجيهه $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c),\vec{v}(a'\,;\,b'\,;\,c')$ ، t و t' هما الوسيطين

III-المعادلة الديكارتية لمستو :
مبرهنة 6 :
كل معادلة من الشكل : $ax + by + cz + d = 0$ حيث a و b و c غير معدومة جميعها هي معادلة مستو.

وفي حالة معلم متعامد متجانس $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$ فإن الشعاع $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c)$ هو شعاع ناظمي لهذا المستوي .

مبرهنة 7 :
ليكن المستوي (P) الذي معادلته $ax + by + cz + d = 0$ و المستوي (P') الذي معادلته : $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

يتوازى المستويان (P) و (P') إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير معدوم k بحيث:
$a' = ka$ و $b' = kb$ و $c' = kc$

وفي الحالات الأخرى (P) و (P') متقاطعان.

مبرهنة 8 :
يعين المستقيم في الفضاء بإعطاء معادلتي مستويين متقاطعان في هذا المستقيم
ملاحظة :
في الفضاء المستقيم ليس له معادلة ديكارتية .

التمــــارين

التمرين 1 :

في الفضاء المنسوب إلى معلم $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط

$C(-1 ; 2 ; -2)$, $B(2 ; -2 ; 4)$, $A(-2 ; +1 ; -3)$

1) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطتان A و B

2) عين تمثيلا وسيطا للمستوي (P) الذي يشمل النقط A و B و C .

التمرين 2 :

تعطى في الفضاء المنسوب إلى معلم $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط $A(-1 ; 2 ; 1)$, $B(2 ; 2 ; 3)$, $C(1 ; -2 ; -1)$. أكتب معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

التمرين 3 :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط :

$A(-1 ; -1 ; -1)$, $B(2 ; 3 ; -2)$, $C(-1 ; 3 ; -1)$ و الشعاع $\vec{u}(-1 ; -2 ; -3)$

1- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوى (OAB)

2- عين المعادلة الديكارتية للمستوى (P) الذي يشمل C ويكون $\vec{u}$ شعاع ناظمي له .

3- عين نقط تقاطع المستوى (OAB) و المستوى (P)

التمرين 4 :

1) عين المعادلة الديكارتية للمستوى (P) الذي يشمل النقطة O يكون $\vec{u}(1 ; 2 ; 4)$ شعاع ناظمي له .

2- عين تمثيلا وسيطيا للمستوى (P') الذي يشمل النقطة $A(-2 ; -2 ; 2)$ و شعاعي توجيهه $\vec{u}(-1 ; 1 ; 4)$ و $\vec{v}(1 ; -1 ; 3)$

3- استنتج المعادلة الديكارتية للمستوى (P')

4- عين نقط تقاطع (P) و (P') باستعمال المعادلتين الديكارتيتين.

التمرين 5 :

يعطى المستويان (P) و (P') بمعادلتيهما : $x - 2y + 3z - 4 = 0$ و $-2x + 3y - z + 2 = 0$. عين التمثيل الوسيطي لمستقيم تقاطع (P) و (P')

التمرين 6 :

يعطى التمثيل الوسيطي للمستوى (P) و المستقيم (P') كمايلي :

$$(P) \begin{cases} x = 3u - 2v - 4 \\ y = 5u - 4v + 1 \\ z = -2u + 2v - 3 \end{cases} \cdot \quad (D) \begin{cases} x = t - 1 \\ y = -t + 4 \\ z = 2t + 3 \end{cases}$$

- عين نقط تقاطع (P) و (D) .

التمرين 7 :

تعطى ثلاث مستقيمات (P_1) , (P_2) , (P_3) بمعادلات ديكارتية :

$(P_1) : x + 4y - z = 0 ; (P_3) : x + 2y - z - 4 = 0 ; (P_2) : x + y + z - 6 = 0$

عين نقط تقاطعهما .

التمرين 8 :

إليك التمثيلين الوسيطين لمستويين (P) و (P') :

$$\begin{cases} x = t - t' + 1 \\ y = -t + 2t' \\ z = 2t - t' - 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = -u + 2v - 1 \\ y = u - v \\ z = -2u + v - 1 \end{cases}$$

عين نقط تقاطع (P) و (P').

التمرين 9 :

ABCDEFGH مكعب في الفضاء . $(A , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE})$ معلم للفضاء.

(P) مستو معادلته : $2x + 4y + 2z - 1 = 0$

1) أكتب تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمات (AB) و (AD) و (AE)

2) عين نقط تقاطع المستوى (P) مع الحروف $[AB]$ و $[AD]$ و $[AE]$ للمكعب ABCDEFGH . 3) عين محيط مضلع تقاطع (P) و حروف المكعب .

التمرين 10 :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المستقيمين (D_1) و (D_2) المعرفين بتمثيلهما الوسيطيين :

$$(D_1) : \begin{cases} x = -t + 3 \\ y = t + 1 \\ z = 2t - 2 \end{cases} \quad , \quad (D_2) : \begin{cases} x = t' + 5 \\ y = t' + 3 \\ z = -t' - 5 \end{cases}$$

1) بين أن (D_1) و (D_2) متقاطعان.

2) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوى (P) الذي يشمل المستقيمان (D_1) و (D_2) .

3) استنتج المعادلة الديكارتية للمستوى (P)

الحلول

التمرين 1 :

1) التمثيل الوسيطي للمستقيم (D)

تكون نقطة $M(x ; y ; z)$ من المستقيم (D) إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{AM} = t . \overrightarrow{AB}$ ، t عدد حقيقي ومنه :

$$\begin{cases} x + 2 = t(2+2) \\ y - 1 = t(-2-1) \\ z + 3 = t(4+3) \end{cases}$$

وعليه :

$$(D) \begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = -3t + 1 \\ z = 7t - 3 \end{cases}$$

2) تعيين التمثيل الوسيطي للمستوى (P) : تكون نقطة $M(x ; y ; z)$ من المستوي (P) إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$

وعليه

$$\begin{cases} x + 2 = t(2+2) + t'(-1+2) \\ y - 1 = t(-2-1) + t'(2-1) \\ z + 3 = t(4+3) + t'(-2+3) \end{cases}$$

ومنه

$$(P) : \begin{cases} x = 4t + t' - 2 \\ y = -3t + t' + 1 \\ z = 7t + t' - 3 \end{cases}$$

التمرين 2 :

المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) :

لدينا : $\overrightarrow{AC}(2 ; -4 ; -2)$, $\overrightarrow{AB}(3 ; 0 ; 2)$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليس لهما نفس الحامل . تكون نقطة $M(x ; y ; z)$ من المستوى (ABC) إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$ ومنه :

$$\begin{cases} x + 1 = t(3) + t'(2) \\ y - 2 = t(0) + t'(-4) \\ z - 1 = t(2) + t'(-2) \end{cases}$$

وعليه :

$$(ABC) : \begin{cases} x = 3t + 2t' - 1 \ldots (1) \\ y = -4t' + 2 \ldots (2) \\ z = 2t - 2t' + 1 \ldots (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (3) نجد : $x + z = 5t$ ومنه : $t = \frac{1}{5}(x + z)$

من (2) : $t' = \frac{2 - y}{4} = \frac{1}{4}(2 - y)$ بالتعويض في (1) نجد :

$x = \frac{3}{5}(x + z) + 2 \times \frac{1}{4}(2 - y) - 1$ ومنه : $x = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}z + 1 - \frac{1}{2}y - 1$ أي

$x - \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}z + \frac{1}{2}y = 0$ وعليه : $\frac{4x - 6z + 5y}{10} = 0$

ومنه المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) هي : $4x + 5y - 6z = 0$

التمرين 3 :

1- التمثيل الوسيطي للمستوى (OAB) :

لدينا $\overrightarrow{OB}(2 ; 3 ; -2)$, $\overrightarrow{OA}(-1 ; -1 ; -1)$

وعليه الشعاعان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ ليس لهما نفس الحامل . تكون نقطة $M(x ; y ; z)$ من المستوى (OAB) إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OA} + t'\overrightarrow{OB}$ ومنه :

$$(OAB) : \begin{cases} x = -t + 2t' \\ y = -t + 3t' \\ z = -t - 2t' \end{cases}$$

2- المعادلة الديكارتية للمستوى (P) :

معادلة (P) من الشكل : $-x - 2y - 3z + \alpha = 0$ وبما أن $C \in (P)$ فإن

$1 - 2(3) - 3(-1) + \alpha = 0$ وعليه : $\alpha = 2$

إذن : $(P) : -x - 2y - 3z + 2 = 0$

3) تعيين نقطة تقاطع (OAB) و (P) :

لحل الجملة :

$$\begin{cases} x = -t + 2t' \\ y = -t + 3t' \\ z = -t - 2t' \\ -x - 2y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

نعوض قيم x و y و z في معادلة المستوى فنجد :

$$-(-t + 2t') - 2(-t + 3t') - 3(-t - 2t') + 2 = 0$$

$t - 2t' + 2t - 6t' + 3t + 6t' + 2 = 0$ أي $6t - 2t' + 2 = 0$

وعليه : $t' = 3t + 1$. بالتعويض في x و y و z نجد :

$$\begin{cases} x = -t + 2(3t + 1) \\ y = -t + 3(3t + 1) \\ z = -t - 2(3t + 1) \end{cases}$$

وعليه :

$$(P) \cap (OAB) : \begin{cases} x = 5t + 2 \\ y = 8t + 3 \\ z = -7t - 2 \end{cases}$$

ومنه المستوى (P) و المستوى (OAB) يتقاطعان في المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $B(2 ; 3 ; -2)$ و شعاع توجيهه $\vec{v}(5 ; 8 ; -7)$.

التمرين 4 :

1- تعيين المعادلة الديكارتية للمستوى (P) :

المعادلة الديكارتية هي : $x + 2y + 4z + c = 0$

وبما أن $O \in (P)$ فإن $c = 0$ وعليه $(P) : x + 2y + 4z = 0$

2- التمثيل الوسيطي للمستوى (P') :

تكون نقطة $M(x ; y ; z)$ من (P') إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$

ومنه : $\begin{cases} x + 2 = -t + t' \\ y + 2 = t - t' \\ z - 2 = 4t + 3t' \end{cases}$ أي : $(P) : \begin{cases} x = -t + t' - 2 \\ y = t - t' - 2 \\ z = 4t + 3t' + 2 \end{cases}$

3- استنتاج المعادلة الديكارتية للمستوي (P') :

لدينا : $\begin{cases} x = -t + t' - 2 \dots (1) \\ y = t - t' - 2 \dots (2) \\ z = 4t + 3t' + 2 \dots (3) \end{cases}$

نجمع (1) و (2) نجد : $x + y = -4$ ومنه : $x + y + 4 = 0$

وهي المعادلة الديكارتية للمستوى (P')

4- تعيين نقط تقاطع (P) و (P') :

نحل الجملة : $\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \dots (1) \\ x + y + 4 = 0 \dots (2) \end{cases}$ من (2) : $x = -y - 4$ وبالتعويض في (1)

نجد : $-y - 4 + 2y + 4z = 0$ أي : $y + 4z - 4 = 0$ وبالتالي :

$$z = \frac{1}{4}(-y + 4)$$

إذن : $\begin{cases} x = -y - 4 \\ z = -\frac{1}{4}y + 1 \\ y = y \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = -y - 4 \\ y = y \\ z = -\frac{1}{4}y + 1 \end{cases}$ وبوضع $y = t$ نجد : $\begin{cases} x = -t - 4 \\ y = t \\ z = -\frac{1}{4}t + 1 \end{cases}$

وهو التمثيل الوسيطي لمستقيم (D) يشمل النقطة $B(-4 ; 0 ; 1)$ و شعاع توجيهه $\vec{w}\left(-1 ; 1 ; -\frac{1}{4}\right)$ وعليه (P) و (P') يتقاطعان وفق المستقيم (D)

التمرين 5 : --

تعيين مستقيم التقاطع بالتمثيل الوسيطي :

نحل الجملة $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \dots (1) \\ -2x + 3y - z + 2 = 0 \dots (2) \end{cases}$

من (1) : $x = 2y - 3z + 4 \dots$ بالتعويض في عبارة x نجد :

$-2(2y - 3z + 4) + 3y - z + 2 = 0$ وعليه : $-y + 5z - 6 = 0$ إذن :

$y = 5z - 6$ بالتعويض في x نجد : $x = 2(5z - 6) - 3z + 4$

بالتالي $x = 7z - 8$

إذن : $\begin{cases} x = 7z - 8 \\ y = 5z - 6 \\ z = z \end{cases}$ و بوضع $z = t$ نجد : $\begin{cases} x = 7t - 8 \\ y = 5t - 6 \\ z = t \end{cases}$

وهو التمثيل الوسيطي لمستقيم (D) يشمل النقطة $A(-8 ; -6 ; 0)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(7 ; 5 ; 1)$ وبالتالي (P') و (P) يتقاطعان وفق (D)

التمرين 6 : --

تعيين تقاطع (P) و (D) .

نحل الجملة المكونة من المعادلات الستة السابقة فنجد $\begin{cases} t - 1 = 3u - 2v - 4 \\ -t + 4 = 5u - 4v + 1 \\ 2t + 3 = -2u + 2v - 3 \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} t - 3u + 2v + 3 = 0 \dots (1) \\ -t - 5u + 4v + 3 = 0 \dots (2) \\ 2t + 2u - 2v + 6 = 0 \dots (3) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نجد : $-8u + 6v + 6 = 0$ ومنه : $u = \frac{1}{8}(6v + 6)$ أي

: $u = \frac{1}{4}(3v + 3)$ بالتعويض في (3) نجد :

$$2t + 2 \cdot \frac{1}{4}(3v + 3) - 2v + 6 = 0$$

ومنه : $2t + \frac{1}{2}(3v + 3) - 2v + 6 = 0$ أي :

$2t + \frac{3}{2}v + \frac{3}{2} - 2v + 6 = 0$ وعليه : $4t + 3v + 3 - 4v + 12 = 0$

ومنه : $4t - v + 15 = 0$ وعليه : $t = \frac{1}{4}(v - 15)$

بالتعويض في (1) : $\frac{1}{4}(v - 15) - \frac{3}{4}(3v + 3) + 2v + 3 = 0$

وعليه $\frac{v - 15 - 9v - 9 + 8v + 12}{4} = 0$

ومنه هذا مستحيل $-21 = 0$

إذن (P) و (D) لا يتقاطعان.

التمرين 7 : --

تعيين نقط تقاطع (P_1) و (P_2) و (P_3) :

نحل الجملة : $\begin{cases} x + 4y - Z = 0 \ldots (1) \\ x + y + Z - 6 = 0 \ldots (1) \\ x + 2y - Z - 4 = 0 \ldots (1) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نجد : $2x + 5y - 6 = 6$ ومنه : $x = \frac{1}{2}(-5y + 6)$

بالتعويض في (3) نجد : $-\frac{5}{2}y + 3 + 2y - Z - 4 = 0$

وعليه : $\frac{-5y + 6 + 4y - 2Z - 8}{2} = 0$ ومنه : $-y - 2Z - 2 = 0$

إذن : $Z = \frac{1}{2}(-y - 2)$ وبالتعويض في (1) نجد :

ومنه : $-\frac{5}{2}y + 3 + 4y + \frac{1}{2}y + 1 = 0$

$\frac{-5y + 6 + 8y + y + 2}{2} = 0$ أي : $4y + 8 = 0$ وبالتالي : $y = -2$

ومنه $x = 8$ و $Z = 0$

إذن نقطة التقاطع هي : $A(8 ; -2 ; 0)$

التمرين 8 : --

تعيين نقط تقاطع (P) و (P') :

نحل الجملة المكونة من المعادلات الستة السابقة فنجد : $\begin{cases} t - t' + 1 = -u + 2v - 1 \\ -t + 2t' = u - v \\ 2t - t' - 1 = -2u + v + 1 \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} t - t' + u - 2v + 2 = 0 \ldots (1) \\ -t + 2t' - u + v = 0 \ldots (2) \\ 2t - t' + 2u - v - 2 = 0 \ldots (3) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نجد : $t' - v + 2 = 0$ وعليه : $t' = v - 2$

بالتعويض في (3) نجد : $2t - v + 2 + 2u - v - 2 = 0$

أي : $2t + 2u - 2v = 0$ ومنه $t + u - v = 0$ وعليه : $t = -u + v$

نعوض t و t' بقيمتيهما في (1) فنجد : $-u + v + 2 + u - 2v + 2 = 0$

وبالتالي : $-2v + 4 = 0$ أي : $v = 2$ وعليه : $t' = 0$ و $t = -u + 2$

بالتعويض في التمثيل الوسيطي للمستوى (P) نجد : $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ 3 = 2t - 1 \end{cases}$

وهو التمثيل الوسيطي لمستقيم (Δ) يشمل النقطة $A(1 ; 0 ; -1)$ وشعاع توجيهه $\vec{w}(1 ; -1 ; 2)$ ومنه (P) و (P') يتقاطعان وفق (Δ).

التمرين 9 : --

1) التمثيلات الوسيطية :

$(AB) : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $(AD) : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ $(AE) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

2) تعيين نقط تقاطع (P) مع الحروف :

- مع الحرف $[AB]$:

نحل الجملة : $\begin{cases} 2x + 4y + 2z - 1 = 0 \\ x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

فنجد : $2t - 1 = 0$ ومنه $t = \frac{1}{2}$ وعليه نقطة التقاطع هي : $p\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 0\right)$

- مع الحرف $[AD]$:

نحل الجملة : $\begin{cases} 2x + 4y + 2z - 1 = 0 \\ x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

فنجد : $4t-1=0$ ومنه $t=\frac{1}{4}$ وعليه نقطة التقاطع هي : $S\left(0\,;\frac{1}{4}\,;0\right)$

• مع الحرف $[AE]$:

نحل الجملة : $\begin{cases}2x+4y+2z-1=0\\ x=0\\ y=0\\ z=t\end{cases}$

فنجد : $2t-1=0$ ومن $t=\frac{1}{2}$ وعليه نقطة التقاطع هي : $k\left(0\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$

3) تعيين محيط المثلث psk :

$\overrightarrow{ks}\left(0\,;\frac{1}{4}\,;-\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{pk}\left(-\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$ و $\overrightarrow{ps}\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{4}\,;0\right)$

ومنه :

$$ps=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+0^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$pk=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(0)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ks=\sqrt{(0)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$L=\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{5}}{4}$$

$$L=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}$$

التمرين 10 : --

1) تبيان أن (D_1) و (D_2) متقاطعان :

نحل الجملة : $\begin{cases}-t+3=t'+5\\ t+1=3t'+3\\ 2t-2=-t'-5\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}t+t'+2=0\ldots(1)\\ t-3t'-2=0\ldots(2)\\ 2t+t'+3=0\ldots(3)\end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد : $4t'+4=0$ أي : $t'=-1$

بالتعويض في (3) نجد : $2t+2=0$ ومنه : $t=-1$ وعليه : $\begin{cases}x=4\\ y=0\\ z=-4\end{cases}$

إذن : (D_1) و (D_2) متقاطعان في النقطة $A(4\,;0\,;-4)$

2) تعيين التمثيل الوسيطي للمستوى (P) :

شعاع توجيه (D_1) هو $\vec{u}(-1\,;1\,;2)$ وشعاع توجيه (D_2) هو $\vec{v}(1\,;3\,;-1)$.

ولدينا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليس لهما نفس الحامل. النقطة $A(3\,;1\,;-2)$ تنتمي إلى (D_1) ومنه (P) يشمل A و الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

تكون نقطة $M(x\,;y\,;z)$ من (P) إذا وفقط إذا كان :

$\overrightarrow{AM}=t\vec{u}+t'\vec{v}$ وعليه : $\begin{cases}x-3=-t+t'\\ y-1=t+t'\\ z+2=2t-t'\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=-t+t'+3\\ y=t+t'+1\\ z=2t-t'-2\end{cases}$

وهو التمثيل الوسيطي للمستوى (P).

3) تعيين المعادلة الديكارتية للمستوى (P) :

لدينا : $\begin{cases}x=-t+t'+3\ldots(1)\\ y=t+t'+1\ldots(2)\\ z=2t-t'-2\ldots(3)\end{cases}$

بجمع (1) و (2) : $x+y=2t'+4$ ومنه : $t'=\frac{1}{2}(x+y-4)$

بالتعويض في (3) نجد : $z = 2t - \frac{1}{2}(x + y - 4) - 2$

ومنه : $z = \frac{4t - x - y + 4 - 4}{2}$ أي $2z = 4t - x - y$

إذن : $4t = x + y + 2z$ أي $t = \frac{1}{4}(x + y + 2z)$

نعوض t و t' بقيمتيهما في المعادلة (1) فنجد :

$$x = -\frac{1}{4}(x + y + 2z) + \frac{1}{2}(x + y - 4) + 3$$

$$x = \frac{-x - y - 2z + 2x + 2y - 8 + 12}{4}$$

$$4x = x + y - 2z + 4$$

وعليه : $3x - y + 2z - 4 = 0$ وهي المعادلة الديكارتية للمستوى (P)

15 – قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

I) قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$:

تعريف 1 :

نقول عن عدد صحيح a أنه يقسم عدداً صحيحاً b إذا و فقط إذا وجد عدد صحيح k بحيث : $b = ak$.

مبرهنات :

1) إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c .

2) إذا كان a يقسم b فإن a يقسم kb و ka يقسم kb حيث k عدد صحيح .

3) إذا كان a يقسم b و c فإن a يقسم $bx + cy$ حيث x و y عددان صحيحان

II) القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$:

مبرهنة 4 :

إذا كان a عدداً صحيحاً و كان b عدداً طبيعيا غير معدوم فإنه توجد ثنائية وحيدة $(q;r)$ من الأعداد الصحيحة تحقق: $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$ حيث : q هو حاصل القسمة و r هو باقي القسمة .

مثال 1 :

$a = 17$ ، $b = 3$ ، $17 = 3 \times 5 + 2$ و منه $q = 5$ ، $r = 2$.

مثال2:

$a = -27$ ، $b = 5$ ، $-27 = 5(-6) + 3$ و منه $q = -6$ ، $r = 3$

III) القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين :

مبرهنة 5 :

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين هو آخر باق غير معدوم في القسمات المتتابعة المنجزة في خوارزمية إقليدس .

مثال :

عين $PGCD\ (24، 149)$

الحل :

$149 = 24 \times 6 + 5$ و $24 = 5 \times 4 + 4$

$5 = 4 \times 1 + 1$ و $4 = 1 \times 4 + 0$

و منه $PGCD\ (149 ، 24) = 1$ و منه العددان 149 و24 أوليان فيما بينهما .

مبرهنة 6 :

مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

مثال :

عين مجموعة القواسم المشتركة للعددين 42و660 .

الحل :

تعيين $PGCD\ (660 ; 42)$:

$660 = 42 \times 15 + 30$

$42 = 30 \times 1 + 12$

$30 = 12 \times 2 + 6$

$12 = 6 \times 2 + 0$

إذن : $PGCD\ (660 ; 42) = 6$

و منه القواسم المشتركة للعددين 42 و 660 هي قواسم العدد 6 و هي : 6 ؛ 3 ؛ 2 ؛ 1 .

خواص :

1) $PGCD\ (ka;kb) = KPGCD\ (a;b)$ و $k \in \mathbb{Z}^*$

2) إذا كان $PCGD(a;b) = d$ فإن :
$$\begin{cases} a = da' \\ b = db' \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$$

التمارين

التمرين 1 :

عين قيم الأعداد الصحيحة الموجبة x و y بحيث : $x^2 - y^2 = 80$

التمرين 2 :

عين قيم الأعداد الصحيحة x ، y بحيث : $xy - 8x - 30 = 0$

التمرين 3 :

عند قسمة كل من العددين 79611 , 50807 على عدد طبيعي a فإن الباقيان هما 11 , 7 على الترتيب . عين العدد a علما أن $a > 300$.

التمرين 4 :

a عدد طبيعي حيث $PGCD\ (a;72) = 8$

عين كل الأعداد a الأصغر من 150 و تحقق الشرط السابق .

التمرين 5 :

عين العددين الطبيعيين a و b حيث :
$$\begin{cases} a + b = 3360 \\ PGCD(a;b) = 84 \\ a \leq b \end{cases}$$

التمرين 6 :

عين العددين الطبيعيين a و b علما أن :
$$\begin{cases} a - b = 82368 \\ PGCD(a;b) = 24 \end{cases}$$

التمرين 7 :

عين الأعداد الطبيعية a و b التي تحقق :
$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 15488 \\ PGCD(a;b) = 8 \end{cases}$$

التمرين 8 :

1) عين كل الأعداد الصحيحة n بحيث $n - 1$ يقسم $n + 3$

2) أثبت أنه من أجل كل عدد صحيح n فإن : $PGCD\left(n-1; n^2+2n-1\right) = 1$

عين كل الأعداد الصحيحة n بحيث :

$(n-1)(2n^3+1)$ يقسم $(n+3)(n^2+2n-2)$

التمرين 9 :

عند قسمة عدد طبيعي غير معدوم a على العدد 45 فإن الباقي هو مربع الحاصل. عين قيمة a.

التمرين 10 :

a عدد طبيعي حيث $a \geq 3$ ، b عدد طبيعي حيث : $b \geq 2$. إذا كان حاصل قسمة $a - 1$ على b هو q فما هو حاصل قسمة $ab^n - 1$ على b^{n+1} ؟

الحلول

التمرين 1 :

تعيين x و y :

$$x^2 - y^2 = 80$$

لدينا : $(x-y)(x+y)$ حيث $x - y < x + y$

1) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 80 \end{cases}$ بالجمع نجد : $2x = 81$ و منه $x = \dfrac{81}{2}$ (مرفوض)

2) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 40 \end{cases}$ بالجمع نجد : $2x = 42$ و منه : $x = 21$ و عليه : $y = 19$

3) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 20 \end{cases}$ بالجمع نجد : $2x = 24$ ومنه : $x = 12$ و عليه : $y = 8$

4) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 16 \end{cases}$ بالجمع نجد : $2x = 21$ و منه : $x = \dfrac{21}{2}$ (مرفوض)

5) $\begin{cases} x - y = 8 \\ x + y = 10 \end{cases}$ بالجمع نجد : $2x = 18$ و منه : $x = 9$ و عليه : $y = 1$

التمرين 2 : ---------------------------------

تعيين قيم x و y ؛

$$xy-8x-30=0$$

و عليه : $x(y-8)=30$.

* $x=1$ و $y-8=30$ أي $x=1$ و $y=38$
* $x=2$ و $y-8=15$ أي $x=2$ و $y=23$
* $x=3$ و $y-8=10$ أي $x=3$ و $y=18$
* $x=5$ و $y-8=6$ أي $x=5$ و $y=14$
* $x=6$ و $y-8=5$ أي $x=6$ و $y=13$
* $x=10$ و $y-8=3$ أي $x=10$ و $y=11$
* $x=15$ و $y-8=2$ أي $x=15$ و $y=10$
* $x=30$ و $y-8=1$ أي $x=30$ و $y=9$
* $x=-1$ و $y-8=-30$ أي $x=-1$ و $y=-22$
* $x=-2$ و $y-8=-15$ أي $x=-2$ و $y=-7$
* $x=-3$ و $y-8=-10$ أي $x=-3$ و $y=-2$
* $x=-5$ و $y-8=-6$ أي $x=-5$ و $y=2$
* $x=-6$ و $y-8=-5$ أي $x=-6$ و $y=3$
* $x=-10$ و $y-8=-3$ أي $x=-10$ و $y=5$
* $x=-15$ و $y-8=-2$ أي $x=-15$ و $y=6$
* $x=-30$ و $y-8=-1$ أي $x=-30$ و $y=7$

التمرين 3 : ---------------------------------

لدينا : $\begin{cases}79611=a.q_1+11\\50807=a.q_2+7\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}79600=a.q_1\\50800=a.q_2\end{cases}$

و منه a قاسم مشترك للعددين 79600 و 50800 و بالتالي a يقسم $PGCD\ (79600\ ,\ 50800)$

* حساب $PGCD\ (79600\ ,\ 50800)$

$$79600=50800\times1+28800$$
$$50800=28800\times1+22000$$
$$28800=22000\times1+6800$$
$$22000=6800\times3+1600$$
$$6800=1600\times4+400$$
$$1600=400\times4+0$$

و منه : $PGCD\ (79600\ ,\ 50800)=400$

وعليه : a يقسم 400 و بالتالي : $a=400$

التمرين 4 : ---------------------------------

تعيين قيم a :

بما أن $PGCD(a;72)=8$ فإن : $a=8a'$ و $72=8\times9$ حيث a' و 9 أوليان فيما بينهما . لدينا : $a<200$ و منه: $8a'<150$ وعليه : $a'\leq18$

أن قيم a' هي : 1 ، 2 ، 4 ، 5 ، 7 ، 8 ، 10 ، 11 ، 13 ، 14 ، 16 ، 17 .

و منه قيم a هي : 8 ، 16 ، 32 ، 40 ، 56 ، 64 ، 80 ، 88 ، 104 ، 112 ، 128 ، 136 .

التمرين 5 : ---------------------------------

تعيين a و b :

بما أن $PGCD(a;b)=84$ فإن : $\begin{cases}a=84a'\\b=84b'\\a'\wedge b'=1\end{cases}$

و بما أن $a+b=3360$ فإن : $84a'+84b'=3360$

وعليه $84(a'+b')=3360$ و منه : $a'+b'=40$

* $a'=1$ و $b'=39$ ومنه $a=84$ و $b=3276$
* $a'=3$ و $b'=37$ ومنه $a=252$ و $b=3108$
* $a'=7$ و $b'=33$ ومنه $a=588$ و $b=2772$
* $a'=9$ و $b'=31$ ومنه $a=756$ و $b=2604$
* $a'=11$ و $b'=29$ ومنه $a=924$ و $b=2436$
* $a'=13$ و $b'=27$ ومنه $a=1092$ و $b=2268$
* $a'=17$ و $b'=23$ ومنه $a=1428$ و $b=1932$
* $a'=19$ و $b'=21$ ومنه $a=1596$ و $b=1764$

التمرين 6 : ---------------------------------

تعيين a و b :

بما أن $PGCD(a;b)=24$ فإن $\begin{cases}a=24a'\\b=24b'\\a'\wedge b'=1\end{cases}$

و لدينا $a.b=82368$ وعليه : $24a'.24b'=82368$

و منه $576a'b'=82368$ وعليه : $a'b'=143=13\times11$

* $a'=1$ و $b'=143$ ومنه $a=24$ و $b=3432$
* $a'=143$ و $b'=1$ ومنه $a=3432$ و $b=24$

* $a'=11$ و $b'=13$ ومنه $a=264$ و $b=312$
* $a'=13$ و $b'=11$ ومنه $a=312$ و $b=264$

التمرين 7 : --

تعيين a و b :

بما أن $PGCD(a;b)=8$ فإن: $\begin{cases} a=8a' \\ b=8b' \\ a'\wedge b'=1 \end{cases}$

و منه : $(8a')^2+2(8b')^2=14488$

$$64a'^2+2(64b'^2)=15488$$

$64\left[a'^2+2b'^2\right]=15488$ ومنه $a'^2+2b'^2=242$

$a'^2=242-2b'^2=2(121-b'^2)$ وعليه $a'^2=2(121-b'^2)$

فيكون $121-b'^2\geq 0$ و منه : $b'^2\leq 121$ إذن : $b'\leq 11$

* $b'=1$: $a'^2=240$ مرفوض ..... $a'=15,49$
* $b'=2$: $a'^2=234$ مرفوض ..... $a'=15,29$
* $b'=3$: $a'^2=224$ مرفوض ..... $a'=14,96$
* $b'=4$: $a'^2=210$ مرفوض ..... $a'=14,49$
* $b'=5$: $a'^2=192$ مرفوض ..... $a'=138,85$
* $b'=6$: $a'^2=170$ مرفوض ..... $a'=13,03$
* $b'=7$: $a'^2=144$ و منه $a'=12$ و عليه $a=56$ و $b=96$
* $b'=8$: $a'=144$ مرفوض ..... $a'=10,67$
* $b'=9$: $a'^2=80$ مرفوض ..... $a'=8,94$
* $b'=10$: $a'^2=42$ مرفوض ..... $a'=6,48$
* $b'=11$: $a'^2=0$ ومنه $a'=0$

مرفوض لأن a' و b' أوليان فيما بينهما . إذن : $a=56$ و $b=96$

التمرين 8 : --

1) تعيين n حيث $n-1$ يقسم $n+3$:

$n-1$ يقسم $n+3$ تكافئ $n-1$ يقسم $(n+3)-(n-1)$

و عليه $n-1$ يقسم 4 أي قيم $n-1$ هي : 4 ، 2 ، 1 ، -1 ، -2 ، -4.

و منه قيم n هي : 5 ، 3 ، 2 ، 0 ، -1 ، -3

2) إثبات أن : $PGCD(n-1;n^2+2n-2)=1$

ليكن m عدد صحيح بحيث $|m|$ عدد أولي و m يقسم $n-1$ و n^2+2n-2.

و منه: m يقسم $n-1$ و يقسم $n^2+2(n-1)$ وبالتالي: m يقسم n^2 و $(n-1)$

و عليه m يقسم n و $(n-1)$ لأن m أولي .

لكن n و $n-1$ أوليان فيما بينهما (عددان متتابعان)

و منه m يقسم $PGCD(n;n-1)$ أو m يقسم 1

و عليه $m=1$ أو $m=-1$. إذن : $PGCD(n-1;n^2+2n-2)=1$

) تعيين الأعداد الصحيحة n بحيث $(n-1)(2n^3+1)$ يقسم

$$(n+3)(n^2+2n-2)$$

2) نضع : $A(n)=(n-1)(2n^3+1)$

و $B(n)=(n+3)(n^2+2n-2)$

إذا كان $(n-1)(2n^3+1)$ يقسم $(n+3)(n^2+2n-2)$

فإن $(n-1)$ يقسم $n+3$ من أجل قيم n في (1)

لأن $(n-1)$ أولي مع n^2+2n-2 وعليه قيم n هي 5 ، 3 ، 2 ، 0 ، -1 ، -3

وعليه $A(-3)=(-3-1)\left(2(-3)^3+1\right)=212$

$$A(-1)=(-1-1)\left(2(-1)^3+1\right)=2$$

$$A(0)=(0-1)\left(2\times 0^3+1\right)=-1$$

$$A(2)=(2-1)\left(2\times 2^3+1\right)=17$$

$$A(3)=(3-1)\left(2\times 3^3+1\right)=110$$

$$A(5)=(5-1)\left(2\times 5^3+1\right)=1004$$

$$B(-3)=(-3+3)\left((-3)^2+2(-3)-2\right)=0$$

$$B(-1)=(-1+3)\left((-1)^2+2(-1)-2\right)=-6$$

$$B(0)=(0+3)\left(0^2+2(0)-2\right)=-6$$

$$B(2)=(2+3)\left(2^2+2(2)-2\right)=30$$

$$B(3)=(3+3)\left(3^2+2(3)-2\right)=78$$

$$B(5)=(5+3)\left(5^2+2(5)-2\right)=264$$

و يكون $A(n)$ قاسما للعدد $B(n)$ في حالة $n=-3$

أو $n=-1$ أو $n=0$.

التمرين 9 : --

تعيين a :

نفرض حاصل القسمة q فيكون باقي القسمة q^2

و منه : $\begin{cases} a=q\times 45+q^2 \\ q^2<45 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} a=45q+q^2 \\ q\le 6 \end{cases}$

و منه قيم q هي : 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 .

و منه قيم a هي : 46 ، 94 ، 144 ، 196 ، 250 ، 306 .

التمرين 10 : --

تعيين حاصل قسمة ab^n-1 على b^{n+1} :

لدينا : $\begin{cases} a-1=bq+r \\ r\le b-1 \end{cases}$ بالضرب في b^n نجد : $\begin{cases} ab^n-b^n=b^{n+1}+rb^n \\ rb^n\le b^{n+1}-b^n \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} ab^n=b^{n+1}q+rb^n+b^n \\ rb^n+b^n\le b^{n+1} \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} ab^n=b^{n+1}q+\left(rb^n+b^n\right) \\ rb^n+b^n\le b^{n+1} \end{cases}$

ومنه بطرح 1 من الطرفين نجد : $\begin{cases} ab^n-1=b^{n+1}q+\left(rb^n+b^n-1\right) \\ rb^n+b^n-1<b^{n+1} \end{cases}$

ومنه حاصل القسمة ab^n-1 على b^{n+1} هو q .

16 - الموافقات في $\mathbb{Z}$ و التعداد

1 - الموافقات بترديد n :

تعريف :

نقول عن عددان صحيحان x و y أنهما متوافقان بترديد n $\left(n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right)$ إذا و فقط كان : $x-y$ مضاعفا للعدد n أي n يقسم $x-y$ و نكتب : $x\equiv y[n]$.

أمثلة :

$5\equiv 1[2]$ لأن : $5-1=4$ وعليه : 1-5 مضاعف 2

$19\equiv 4[3]$ لأن : $19-4=5$ وعليه : 4- 19 مضاعف 3

$23\equiv -1[2]$ لأن : $23-(-1)$ مضاعف 2 .

$7\equiv 7[3]$ لأن : $7-7=0$ و هو مضاعف 3.

مبرهنات :

y,x,b,a أعداد صحيحة . n عدد طبيعي غير معدوم $(n\neq 1)$

1) إذا كان $a\equiv b[n]$ و $x\equiv y[n]$ فإن : $a+x\equiv b+y[n]$

2) إذا كان $x\equiv y[n]$ فإن : $x+a\equiv y+a[n]$

3) إذا كان $a\equiv b[n]$ و $x\equiv y[n]$ فإن : $x\times a\equiv y\times b[n]$

4) إذا كان $x\equiv y[n]$ فإن : $a+x\equiv a+y[n]$

5) إذا كان $x\equiv y[n]$ و $\lambda\in\mathbb{N}^*$ فإن : $\lambda x\equiv \lambda y[\lambda n]$

6) إذا كان $x\equiv y[n]$ و $p\in\mathbb{N}$ فإن : $x^p\equiv y^p[n]$

7) كل عدد صحيح x يوافق بترديد n ، باقي قسمته على n .

أي إذا كان : $x=nq+r$ فإن : $x\equiv r[n]$

8) يكون العدد الصحيح a قابلا للقسمة على n إذا و فقط إذا كان : $a\equiv 0[n]$

11- التعداد :

1- نشر عدد طبيعي وفق أساس :

مبرهنة :

n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2، كل عدد طبيعي n يكتب بطريقة وحيدة على الشكل :

$$N=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{n-1}n^{n-1}+a_nn^n$$

حيث من أجل كل عدد i فإن : $0\le a_i\le x-1$. $i\in\{0,1,2,......,n\}$ و $a_n\neq 0$.

و يكتب A اصطلاحا على الشكل : $N=\overline{a_n a_{n-1}......a_1 a_0}$

و هي الكتابة المختصرة للعدد N في النظام الذي أساسه x و تسمى الأعداد $a_n,......a_1,a_0$ أرقام هذا النظام .

حالات خاصة :

1) النظام العشري : هو النظام الذي أساسه 10 أي $x=10$ و أرقامه هي : $9,8,7,6,5,4,3,2,1,0$.

2) النظام الثنائي : هو النظام الذي أساسه 2 . و أرقامه $1,0$.

3) النظام الثماني : هو النظام الذي أساسه 8 . و أرقامه $7,6,5,4,3,2,1,0$.

4) النظام الذي أساسه 12 : و أرقامه $\beta,\alpha,9,8,7,6,5,4,3,2,1,0$. حيث $\alpha=10$ و $\beta=11$

الانتقال من نظام أساسه α إلى نظام أساسه β :

يتم ذلك بالانتقال من النظام الذي أساسه α إلى النظام العشري . ثم الانتقال إلى النظام الذي أساسه β .

التمـــاريـــن

التمرين 1 :

1- ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة : 2^n على 7 ثم استنتج باقي قسمة كل من 2^{2008} و $(1962)^{1954}$ و $(1418)^{1004}$ على 7 .

2- أثبت أن العدد : $A_n=2007.2^{3n+1}+1417.2^{6n}+1954$ يقبل القسمة على 7 من أجل كل عدد طبيعي n.

التمرين 2 :

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $n(n^4-1)\equiv 0[5]$

التمرين 3 :

ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد : $n=100^{1000000}$ على 13 .

التمرين 4 :

برهن أن : $7^n+1\equiv 0[8]$ من أجل : $n=2k+1$ و $k\in\mathbb{N}$

ثم عين العدد الطبيعي a بحيث : $7^n+1\equiv a[8]$ من أجل $n=2k$ و $k\in\mathbb{N}$

التمرين 5 :

1- أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة كل من العددين 2^n و 10^n على 13.

2- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$17.(1310)^{6n+3}+24.(1926)^{12n+7}\equiv 0[13]$$

3- برهن أن : $(2012)^{1990}+(1835)^{1991}+3\equiv 0[13]$

4- عين العدد الطبيعي n بحيث : $10^n-2^n\equiv 0[13]$

التمرين 6 :

عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $n^2-2n+27\equiv 0[n-3]$

التمرين 7 :

n عدد طبيعي غير معدوم .

1- أثبت أن كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته r على n.

2- إذا علمت أن باقي قسمة a على n هو $n-1$ $(n\geq 1)$ ما هو باقي قسمة $2n+1$ على n

3- عين باقي قسمة العدد 415 على 8 ثم استنتج باقي قسمة العدد 831 على 8.

التمرين 8 :

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $4^n-3n-1\equiv 0[9]$

التمرين 9 :

1- حدد قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $n^2+n+1\equiv 0[7]$

2- أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 7

3- استنتج قيم الأعداد الطبيعية s بحيث : $2^{2s}+2^s+1\equiv 0[7]$

التمرين 10 :

أكتب في نظام العدد الذي أساسه 9 الأعداد التالية والمكتوبة في النظام العشري: $8540,1417,2008,1962,1830,100$.

التمرين 11 :

a عدد يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 2 كما يلي : $\overline{1011011}$.
أكتب a في نظام التعداد ذي الأساس 12

التمرين 12 :

عين نظام التعداد الذي أجريت فيه العملية التالية : $\overline{214}+\overline{362}=\overline{606}$

التمرين 13 :

احسب في نظام التعداد الذي أساسه 5 ما يلي :

$\overline{4221}+\overline{3424}$

$\overline{1244}+\overline{4423}$

التمرين 14 :

اكتب العدد $(a+1)^4$ في نظام التعداد الذي أساسه a حيث $a>6$

التمرين 15 :

يكتب العدد a في النظام الذي أساسه 5 كما يلي : $\overline{\alpha 33}$. و يكتب a في النظام الذي أساسه 3

كما يلي : $\overline{2\beta\beta\alpha}$. عين a في النظام العشري .

التمرين 16 : --

احسب : $(x-2)(x^2+x+1)$

في أي نظام تعداد x لدينا : $\overline{110}\times\overline{111}=\overline{101010}$

التمرين 17 : --

أكتب العدد 2^{10} في نظام العد الذي أساسه 2 .

التمرين 18 : --

أكتب جدول الجمع في نظام العد الذي أساسه 7 .

الحلـــــــــول

التمرين 1 : --

1- دراسة بواقي قسمة 2^n على 7 :

$$2^0\equiv1[7]\ ,\ 2^1\equiv2[7]\ ,\ 2^2\equiv4[7]\ ,\ 2^3\equiv1[7]$$

و منه : $(2^3)^p\equiv(1)^p[7]$ أي : $2^{3p}\equiv1[7]$; $p\in\mathbb{N}$

و عليه : $2^{3p}\times2\equiv1\times2[7]$ أي $2^{3p+1}\equiv2[7]$

$2^{3p}\times2^2\equiv1\times2^2[7]$ أي $2^{3p+2}\equiv4[7]$

و منه : - لما $n=3p$: باقي قسمة 2^n على 7 هو 1

- لما $n=3p+1$: باقي قسمة 2^n على 7 هو 2

- لما $n=3p+2$: باقي قسمة 2^n على 7 هو 4

الاستنتاج :

- باقي قسمة 2^{2008} على 7 :

لدينا : $2008=3\times669+1$ و منه : $2^{2008}\equiv2[7]$

- باقي قسمة $(1962)^{1954}$ على 7 :

لدينا : $1962\equiv2[7]$ و منه $1962^{1954}\equiv2^{1954}[7]$ لكن : $1954=3\times665+1$

و منه : $2^{1954}\equiv2[7]$ و عليه : $(1962)^{1954}\equiv2[7]$

- باقي قسمة $(1418)^{1004}$ على 7 :

لدينا : $1418\equiv4[7]$ و منه $(1418)^{1004}\equiv4^{1004}[7]$

و عليه : $(1418)^{1004}\equiv(2^2)^{1004}[7]$ أي : $(1418)^{1004}\equiv2^{2008}[7]$

لكن $2008=3\times669+1$ و منه $(1418)^{1004}\equiv2[7]$

2) إثبات أن A_n يقبل القسمة على 7 :

لدينا : $2007\equiv5[7]$ و منه $2007.2^{3n+1}\equiv5.2^{3n+1}[7]$ لكن $2^{3n+1}\equiv2[7]$

و عليه : $2007.2^{3n+1}\equiv10[7]$ أي أن : $(1)...2007.2^{3n+1}\equiv3[7]$

و لدينا : $1417\equiv3[7]$ ومنه : $1417.2^{6n}\equiv3.2^{6n}[7]$ و لدينا : $2^{6n}=(2^{3n})^2$

و منه : $2^{6n}\equiv1[7]$ وبالتالي : $(2)...1417.2^{6n}\equiv3[7]$

من (1) و (2) : $(3)...2007.2^{3n+1}+1417.2^{6n}\equiv6[7]$

و لدينا : $(4).......1954\equiv1[7]$

من (3) و (4) : $2007.2^{3n+1}+1417.2^{6n}+1954\equiv0[7]$

و منه : $A_n\equiv0[7]$ من أجل كل عدد طبيعي n.

التمرين 2 : --

1) إثبات أن :

$n(n^4-1)\equiv0[5]$ بوضع: $B_n=n(n^4-1)$

عند قسمة أي عدد طبيعي n على 5 فإن البواقي الممكنة هي : 4,3,2,1,0 و عليه ندرس جميع قيم n في كل حالة :

1- إذا كان $n\equiv0[5]$ فإن $n^4\equiv0[5]$ و $n^4-1\equiv-1[5]$ وعليه

$n(n^4-1)\equiv0[5]$

2- إذا كان $n\equiv1[5]$ فإن $n^4\equiv1[5]$ و $n^4-1\equiv0[5]$

ومنه $n(n^4-1)\equiv0[5]$

3- إذا كان $n\equiv2[5]$ فإن $n^4\equiv1[5]$ و $n^4-1\equiv0[5]$

ومنه $n(n^4-1)\equiv0[5]$

4- إذا كان $n\equiv3[5]$ فإن $n^4\equiv1[5]$ و $n^4-1\equiv0[5]$

ومنه $n(n^4-1)\equiv0[5]$

5- إذا كان $n\equiv4[5]$ فإن: $n^4\equiv1[5]$ و $n^4-1\equiv0[5]$

ومنه $n(n^4-1)\equiv0[5]$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $B_n\equiv0[5]$

التمرين 3 : ------------------------------------

لدينا : $100 \equiv 9[13]$ و $100^2 \equiv 81[13]$ أي $(100)^2 \equiv 3[13]$

$(100)^3 \equiv 9\times 3[13]$ أي $(100)^3 \equiv 1[13]$

و لدينا : $100^{1000000} = 100^{999999+1}$

$= 100^{999999}.100^1$

$= \left[(100)^3\right]^{333333} \times 100$

و لدينا : $(100)^3 \equiv 1[13]$ و منه : $\left[(100)^3\right]^{333333} \equiv 1[13]$

و منه : $(100)^{999999} \equiv 1[13]$ و عليه : $100^{666666}.100 \equiv 1.9[13]$

إذن : $(100)^{1000000} \equiv 9[13]$

التمرين 4 : ------------------------------------

1) لدينا : $7^n+1 \equiv 0[8]$ و منه : $7^n \equiv -1[8]$

و لدينا : $7 \equiv -1[8]$ و منه : $7^n \equiv (-1)^n[8]$

و منه : $7^n \equiv -1[8]$ معناه : $n=2p+1$ و $p\in\mathbb{N}$

2) تعيين a :

إذا كان $n=2k$ فإن : $(-1)^n \equiv 1[8]$ و منه : $7^n \equiv 1[8]$

و بالتالي : $7^n+1 \equiv 2[8]$ و منه : $a=2$

التمرين 5 : ------------------------------------

1- بواقي قسمة 2^n على 13 :

$$2^0 \equiv 1[13]\ ,\ 2^1 \equiv 2[13]\ ,\ 2^2 \equiv 4[13]\ ,\ 2^3 \equiv 8[13]$$
$$2^4 \equiv 3[13]\ ,\ 2^5 \equiv 6[13]\ ,\ 2^6 \equiv 12[13]\ ,\ 2^7 \equiv 11[13]$$
$$2^8 \equiv 9[13]\ ,\ 2^9 \equiv 5[13]\ ,\ 2^{10} \equiv 10[13]\ ,\ 2^{11} \equiv 7[13]$$
$$2^{12} \equiv 1[13]$$

لدينا : $2^{12} \equiv 1[13]$ و منه : $2^{12p} \equiv 1[13]$ من أجل كل عدد طبيعي p .

و منه : $2^{12p}.2 \equiv 2[13]$ أي : $2^{12p+1} \equiv 2[13]$

$2^{12p}.2^2 \equiv 2^2[13]$ أي : $2^{12p+2} \equiv 4[13]$

$2^{12p}.2^3 \equiv 2^3[13]$ أي : $2^{12p+3} \equiv 8[13]$

$2^{12p}.2^4 \equiv 2^4[13]$ أي : $2^{12p+4} \equiv 3[13]$

$2^{12p}.2^5 \equiv 2^5[13]$ أي : $2^{12p+5} \equiv 6[13]$

$2^{12p}.2^6 \equiv 2^6[13]$ أي : $2^{12p+6} \equiv 12[13]$

$2^{12p}.2^7 \equiv 2^7[13]$ أي : $2^{12p+11} \equiv 11[13]$

$2^{12p}.2^8 \equiv 2^8[13]$ أي : $2^{12p+8} \equiv 9[13]$

$2^{12p}.2^9 \equiv 2^9[13]$ أي : $2^{12p+9} \equiv 5[13]$

$2^{12p}.2^{10} \equiv 2^{10}[13]$ أي : $2^{12p+10} \equiv 10[13]$

$2^{12p}.2^{11} \equiv 2^{11}[13]$ أي : $2^{12p+11} \equiv 7[13]$

و عليه البواقي هي :

لما $n=12p$: الباقي هو 1 لما $n=12p+1$ الباقي هو 2

لما $n=12p+2$: الباقي هو 4 لما $n=12p+3$ الباقي هو 8

لما $n=12p+4$: الباقي هو 3 لما $n=12p+5$ الباقي هو 6

لما $n=12p+6$: الباقي هو 12 لما $n=12p+7$ الباقي هو 11

لما $n=12p+8$: الباقي هو 9 لما $n=12p+9$ الباقي هو 5

لما $n=12p+10$: الباقي هو 10 لما $n=12p+11$ الباقي هو 7

بواقي قسمة 10^n على 13 :

$$10^0 \equiv 1[13]\ ,\ 10^1 \equiv 10[13]\ ,\ 10^2 \equiv 9[13]$$
$$10^3 \equiv 12[13]\ ,\ 10^4 \equiv 3[13]\ ,\ 10^5 \equiv 4[13]$$
$$10^6 \equiv 1[13]$$

لدينا : $10^6 \equiv 1[13]$ و منه : $10^{6m} \equiv 1[13]$ حيث : $m\in\mathbb{N}$

$10^{6m}.10 \equiv 10[13]$ و منه : $10^{6m+1} \equiv 10[13]$

$10^{6m}.10^2 \equiv 10^2[13]$ و منه : $10^{6m+2} \equiv 9[13]$

$10^{6m}.10^3 \equiv 10^3[13]$ و منه : $10^{6m+3} \equiv 12[13]$

$10^{6m}.10^4 \equiv 10^4[13]$ و منه : $10^{6m+4} \equiv 3[13]$

$10^{6m}.10^5 \equiv 10^5[13]$ و منه : $10^{6m+5} \equiv 4[13]$

و منه لما : $10^n \equiv 1[13] : n=6m$

$10^n \equiv 10[13] : n=6m+1$

$10^n \equiv 9[13] : n=6m+2$

$10^n \equiv 12[13] : n = 6m+3$

$10^n \equiv 3[13] : n = 6m+4$

$10^n \equiv 4[13] : n = 6m+5$

2- بوضع : $A_n = 17.(1310)^{6n+3} + 24.(1926)^{12n+7}$

نبين أن $A_n \equiv 0[13]$

لدينا : $17 \equiv 4[13]$ و $1310 \equiv 10[13]$ و عليه : $(1310)^{6n+3} \equiv 10^{6n+3}[13]$

و منه : $(1310)^{6n+3} \equiv 12[13]$ و بالتالي : $17.(1310)^{6n+3} \equiv 4.12[13]$

أي : $17.(1310)^{6n+3} \equiv 9[13]$ ......(1) و لدينا : $24 \equiv 11[13]$

و $1926 \equiv 2[13]$ و عليه : $(1926)^{12n+7} \equiv 2^{12n+7}[13]$

و منه : $(1926)^{12n+7} \equiv 11[13]$ و بالتالي : $24.(1926)^{12n+7} \equiv (11)^2[13]$

و عليه : $24.(1926)^{12n+7} \equiv 4[13]$ ......(2)

من (1) و (2) : $17.(1310)^{6n+3} + 24.(1926)^{12n+7} \equiv 0[13]$

و عليه : $A_n \equiv 0[13]$

3) نبرهن أن : $(2012)^{1990} + (1835)^{1991} \equiv 10[13]$

لدينا : $2012 \equiv 10[13]$ و منه : $(2012)^{1990} \equiv 10^{1990}[13]$

لكن : $1990 = 6\times331+4$ و عليه : $(2012)^{1990} \equiv 3[13]$

و لدينا : $1835 \equiv 2[13]$ و منه : $(1835)^{1991} \equiv 2^{1991}[13]$

ولكن : $1991 = 12\times165+11$ و عليه : $(1835)^{1991} \equiv 7[13]$

إذن : $(2012)^{1990} + (1835)^{1991} \equiv 10[13]$

و بالتالي : $(2012)^{1990} + (1835)^{1991} + 3 \equiv 0[13]$

4) تعيين n بحيث : $10^n - 2^n \equiv 0[13]$

نقوم بتعميم الدور : $10^{6m} \equiv 1[13]$ ومنه : $(10^{6m})^2 \equiv (1)^2[13]$

و عليه : $10^{12m} \equiv 1[13]$ إذن : $10^{12m+\alpha} \equiv 10^{\alpha}[13]$

حيث : $0 \le \alpha \le 11$ من أجل $\alpha = 0$: $10^{12m} \equiv 1[13]$

من أجل $\alpha = 1$: $10^{12m+1} \equiv 10[13]$

من أجل $\alpha = 2$: $10^{12m+2} \equiv 9[13]$

من أجل $\alpha = 3$: $10^{12m+3} \equiv 12[13]$

من أجل $\alpha = 4$: $10^{12m+4} \equiv 3[13]$

من أجل $\alpha = 5$: $10^{12m+5} \equiv 4[13]$

من أجل $\alpha = 6$: $10^{12m+6} \equiv 1[13]$

من أجل $\alpha = 7$: $10^{12m+7} \equiv 10[13]$

من أجل $\alpha = 8$: $10^{12m+8} \equiv 9[13]$

من أجل $\alpha = 9$: $10^{12m+9} \equiv 12[13]$

من أجل $\alpha = 10$: $10^{12m+10} \equiv 3[13]$

من أجل $\alpha = 11$: $10^{12m+11} \equiv 4[13]$

لدينا : $10^n - 2^n \equiv 0[13]$ و منه : $10^n \equiv 2^n[13]$

و عليه : $n = 12p$ أو $n = 12p+4$ أو $n = 12p+8$ حيث $p \in \mathbb{N}$

التمرين 6 : --

تعيين n : $n^2 - 2n + 27 \equiv 0[n-3]$

أي : $n^2 - 3n + n + 27 \equiv 0[n-3]$

$n(n-3) + n + 27 \equiv 0[n-3]$

$n(n-3) + (n-3) + 30 \equiv 0[n-3]$

$(n-3)(n+1) + 30 \equiv 0[n-3]$

لكن : $n-3 \equiv 0[n-3]$ و عليه : $30 \equiv 0[n-3]$

و منه : $n-3$ يقسم 30 و عليه : $n-3 \in \{1;2;3;5;6;10;15;30\}$

و بالتالي قيم n هي : 4 , 5 , 6 , 8 , 9 , 13 , 18 , 33 .

التمرين 7 : --

1- إثبات أن $a \equiv r[n]$

لدينا : $a = nq + r$ حيث : $0 \le r < n$ و عليه : $a - r = nq$

و منه : $a - r \equiv 0[n]$ و بالتالي : $a \equiv r[n]$.

2) تعيين باقي قسمة $2n+1$ على n :

لدينا : $a \equiv n-1[n]$ و عليه: $2a \equiv 2n-2[n]$.

و منه : $2a+1 \equiv 2n-1[n]$ أي : $2a+1 \equiv n-1+n[n]$

إذن : $2a+1 \equiv n-1[n]$

وعليه باقي قسمة $2a+1$ على n هو $n-1$ و هو نفس باقي قسمة a على n .

- تعيين باقي قسمة 415 على 8 :

لدينا : $415 = 8\times 5+7$ و منه : $415 \equiv 7[8]$

- استنتاج باقي قسمة 831 على 8 :

لدينا $831 = 2(415)+1$ و منه : $831 \equiv 7[8]$

التمرين 8 :

1- ندرس بواقي قسمة 4^n على 9 :

$$4^0 \equiv 1[9] \; ; \; 4^1 \equiv 4[9] \; ; \; 4^2 \equiv 7[9] \; ; \; 4^3 \equiv 1[9]$$

و منه بما أن : $4^3 \equiv 1[9]$ فإن : $4^{3k} \equiv 1[9]$, $4^{3k+1} \equiv 4[9]$, $4^{3k+2} \equiv 7[9]$

لما $n \equiv 0[3]$: $4^n \equiv 1[9]$ و لما $n \equiv 1[3]$: $4^n \equiv 4[9]$

و لما $n \equiv 2[3]$: $4^n \equiv 7[9]$

- إثبات أن : $4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$

- من أجل : $n \equiv 0[3]$: $3n \equiv 0[9]$

و عليه $4^n - 3n - 1 \equiv 1 - 0 - 1[9]$ إذن : $4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$

- من أجل : $n \equiv 1[3]$: $3n \equiv 3[9]$

و عليه $4^n - 3n - 1 \equiv 4 - 3 - 1[9]$ إذن : $4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$

- من أجل : $n \equiv 2[3]$: $3n \equiv 6[9]$

و عليه $4^n - 3n - 1 \equiv 7 - 6 - 1[9]$ إذن : $4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$

إذن : $4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$ من أجل كل عدد طبيعي n .

التمرين 9:

1) تحديد n بحيث : $n^2+n+1 \equiv 0[7]$

و منه $n^2+1.n+1 \equiv 0[7]$ لكن $8 \equiv 1[7]$ و عليه $n^2+8n+1 \equiv 0[7]$

إذن : $(n+4)^2-16+1 \equiv 0[7]$ و عليه $(n+4)^2-15 \equiv 0[7]$

أي : $(n+4)^2-1 \equiv 0[7]$ و عليه : $(n+4-1)(n+4+1) \equiv 0[7]$

و منه : $(n+3)(n+5) \equiv 0[7]$

و عليه $n+3 \equiv 0[7]$ أو $n+5 \equiv 0[7]$ لأن 7 عدد أولي

أي أن : $n \equiv -3[7]$ أو $n \equiv -5[7]$ إذن : $n \equiv 4[7]$ أو $n \equiv 2[7]$.

2) بواقي قسمة 2^n على 7:

$$2^0 \equiv 1[7] \, , \, 2^1 \equiv 2[7] , 2^2 \equiv 4[7] , 2^3 \equiv 1[7]$$

و عليه : $2^{3p} \equiv 1[7]$, $2^{3p+1} \equiv 2[7]$, $2^{3p+2} \equiv 4[7]$

3) استنتاج قيم s :

$2^{2s}+2^s+1 \equiv 0[7]$ بوضع : $2^s = n$ نجد : $n^2+n+1 \equiv 0[7]$

ومن السؤال الأول نجد : $n \equiv 4[7]$ أو $n \equiv 2[7]$

وعليه : $2^s \equiv 4[7]$ أو $2^s \equiv 2[7]$

من السؤال الثاني نجد : $s = 3p+2$ أو $s = 3p+1$ حيث $p \in \mathbb{N}$

التمرين 10

كتابة الأعداد في النظام ذي الأساس 8 :

- $100 = 12\times 8+4$
  $12 = 1\times 8+4$
  $1 = 0\times 8+1$

و منه 100 يكتب $\overline{144}$ في النظام ذي الأساس 8.

- $1830 = 228\times 8+6$
  $228 = 28\times 8+4$
  $28 = 3\times 8+4$
  $3 = 0\times 8+3$

و منه 1830 تكتب $\overline{3446}$ في النظام ذي الأساس 8

- $1962 = 245\times 8+2$
  $245 = 30\times 8+5$
  $30 = 3\times 8+6$
  $3 = 0\times 8+3$

و منه 1962 يكتب $\overline{3652}$ في النظام ذي الأساس 8

- $2008 = 223\times 9+1$
  $223 = 25\times 9+3$
  $25 = 2\times 9+7$
  $2 = 0\times 9+2$

و منه 2008 يكتب $\overline{2731}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 .

إذن : $(x-2)(x^2+x+1)=0$

و عليه إما : $x-2=0$ أو $x^2+x+1=0$.

$x-2=0$ تكافئ $x=2$

$x^2+x+1=0$ هي معادلة من الدرجة الثانية $\Delta=-3$ و منه ليس لها حلول .

إذن : $x=2$

التمرين 17 : --

$$2^{10}=0\times2^0+0\times2^1+0\times2^2+0\times2^3+0\times2^4+0\times2^5+0\times2^6+0\times2^7+0\times2^8+0\times2^9+1\times2^{10}$$

و منه 2^{10} يكتب في النظام الثاني : $\overline{10000000000}$

التمرين 18 : --

+	0	1	2	3	4	5	6
0	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
1	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$
2	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
3	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
4	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
5	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
6	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$

17- الأعـــداد الأولـيـــة

المضاعف المشترك الأصغر :

العدد الأولي :

تعريف :

نقول عن عدد طبيعي a إنه أولي إذا كان عدد قواسمه اثنين مختلفين .

مبرهنة 1:

كل عدد طبيعي a غير أولي و أكبر تماما من 1 يقبل ، على الأقل ، قاسماً أولياً b يحقق : $b^2\le a$

مبرهنة 2:

كل عدد طبيعي a غير أولي و أكبر تماما من 1 يقبل تحليلاً إلى جداء عوامل أولية و هذا التحليل وحيد .

قواسم عدد طبيعي :

مبرهنة 3 :

يكون العدد b قاسماً للعدد a إذا كان كل عامل أولي في تحليل b موجودا في تحليل a و بأس إما مساو وإما أصغر من أسه في تحليل a .

عدد قواسم عدد طبيعي:

مبرهنة 4:

عدد قواسم العدد a حيث: $a=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times\dots\times a_n^{\alpha_n}$ هو $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_n)$

حيث : $a_1,a_2,\dots,a_n$ أعداد أولية . $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ أعداد طبيعية .

مثال :

ما هو عدد قواسم 120 .

الحل :

$120=2^3\times3\times5$ ومنه عدد قواسمه هو : $(1+3)(1+1)(1+1)$ أي 16 قاسم

تعيين القاسم المشترك الأكبر:

مبرهنة5:

القاسم المشترك الأكبر للأعداد $a_n,\dots,a_2,a_1$ هو جداء الأعداد الأولية المشتركة في تحليلاتها بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة فقط وبأصغر أس .

مضاعفات عدد طبيعي :

مبرهنة 6 :

يكون العدد الطبيعي b مضاعف للعدد a إذا كان كل عامل أولي في تحليل a موجود في تحليل b و بأس مساو و إما أكبر من أسه في تحليل a .

تعيين المضاعف المشترك الأصغر :

مبرهنة 7:

المضاعف المشترك الأصغر للأعداد $a_n,\dots,a_2,a_1$ هو جداء العوامل الأولية الموجودة في تحليلاتها بحيث يأخذ كل عامل مرة واحدة و بأكبر أس .

تعيين المضاعفات المشتركة لعددين :

مبرهنة 8:

المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين هي مضاعفات مضاعفهما المشترك الأصغر .

العلاقة بين القاسم المشترك الأكبرو المضاعف المشترك الأصغر :

مبرهنة 9:

$$PGCD(a,b).PPCM(a,b) = a.b$$

نتيجة :

إذا كان $b;a$ أوليان فيما بينهما .

فإن : $PPCM(a;b) = a.b$

خواص المضاعف المشترك الأصغر:

1) إذا كان λ عدداً صحيحاً غير معدوم فإن :

$$PPCM(\lambda a;\lambda b) = |\lambda|.PPCM(a;b)$$

2) عند البحث عن المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد يمكن تعويض عددين منهما بمضاعفهما المشترك الأصغر .

مبرهنة 10 (مبرهنة بيزو):

يكون العددان الطبيعيان غير المعدومين a و b أوليان فيما بينهما إذا ، و فقط ، إذا وجد عددان صحيحان x و y بحيث $ax + by = 1$

تطبيقات على مبرهنة بيزو

1) إذا كان a عدداً أوليا مع العددان b و C فإنه أوليا مع الجداء $b.C$

2) إذا كان a أولي مع كل من الأعداد $b_n,........,b_2,b_1$ فإنه أولي مع الجداء $b_1 \times b_2 \times b_3 \times .... \times b_n$

3) إذا كان a أولي مع a فإن a أولي مع b^n

مبرهنة 11(غوص):

a و b عددان طبيعيان غير معدومين ، C عدد صحيح .

إذا قسم العدد a الجداء $b.C$ وكان أوليا مع b فإن a يقسم C .

تطبيقات على مبرهنة غوص:

1-إذا قبل العدد b القسمة على كل من العددين $a_2;a_1$ و كان $a_2;a_1$ أوليان فيما بينهما فإن : b يقبل القسمة على $a_1 \times a_2$

2-إذا قبل العدد b القسمة على كل من الأعداد $a_n,.......,a_2,a_1$ الأولية فيما بينها مثنى مثنى فإنه يقبل القسمة على الجداء: $a_1 \times a_2 \times .... \times a_n$

التمـــــاريـــــن

التمرين 1:

1) هل العدد 503 أولي أم لا ؟

2) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة : $x^2 - y^2 = 503$

التمرين 2:

1) حلل العدد 60 إلى جداء عوامل أولية .

2) ما هو عدد قواسم العدد 60 .

3) عين قواسم العدد 60 .

التمرين 3:

نعتبر العددان A و B حيث : $A = 44 \times 88 \times 96$ و $B = 35 \times 56 \times 78$

1) حلل A و B إلى جداء عوامل أولية .

2) أحسب : $PGCD(A;B)$

3) أحسب : $PPCM(A;B)$

التمرين 4:

دون تحليل إلى جداء عوامل أولية أحسب : $PGCD(30000;170000)$ و $PPCM(30000;170000)$

التمرين 5:

اوجد أصغر عدد طبيعي له عشرة قواسم .

التمرين 6:

1) حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة $9x - 22y = 55 ....(1)$

2) عين الحلول $(x;y)$ للمعادلة (1) بحيث $PGCD(x;y) = 55$

التمرين 7 :

d,c,b,a أربعة حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها q بحيث : $q > 1$ و q أولي مع a . عين هذه الحدود علماً أن : $10a^2 = d - b$

التمرين 8:

1) أوجد كل الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 1980.

2) عين الأعداد الطبيعية b,a حيث $\mu^2 - 5\delta^2 = 1980$ بحيث
$PPCM(a;b) = \mu , PGCD(a;b) = \delta$

التمرين 9:

a و b عددان طبيعيان حيث $a \leq b$ δ قاسمهما المشترك الأكبر، μ مضاعفهما المشترك الأصغر . عين كل الأعداد a ; b حيث : $11\delta + 7\mu = 1989$

التمرين 10:

1) عين : $PGCD(2490;32785;2905)$

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $7x+6y=79......(1)$ لاحظ أن : $79=7+72$

3) اشترى نادي كرة اليد ملابس رياضية للاعبيه .علما أن ثمن بذلة اللاعب هو 2905 DA و ثمن بذلة اللاعبة 2490DA و علما أن النادي دفع في المجموع 32785 DA ما هو عدد اللاعبين و عدد اللاعبات

التمرين 11 : --

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5x-3y=7...(1)$

نفرض $(x;y)$ حل للمعادلة (1).ما هي القيم الممكنة لـ : $PGCD(x;y)$

2) ما هي الحلول $(x;y)$ للمعادلة (1) بحيث يكون $PGCD(x;y)$ أكبر ما يمكن .

التمرين 12 : --

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(1)....44x-35y=7$

1) بين أنه إذا كانت $(x;y)$ حل للمعادلة (1) فإن : $x\equiv 0[7]$

2) عين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) .

3) إذا كان $(x;y)$ حل للمعادلة (1) ما هي القيم الممكنة لـ : $PGCD(x;y)$

4) عين الحلول $(x;y)$ للمعادلة (1) بحيث : $PGCD(x;y)=7$

5) عين الحلول $(x;y)$ للمعادلة (1) بحيث يكون : x و y أوليان فيما بينهما .

6) عين الحلول $(x;y)$ للمعادلة (1) بحيث : $x^2+y^2<2009$

الحلول

التمرين 1: --

1) البحث عن أولية : $a=503$

القاسم الأولي b	قابلية القسمة	b^2	مقارنة b^2 و a
2	b لا يقسم a	4	$b^2<a$
3	b لا يقسم a	9	$b^2<a$
5	b لا يقسم a	25	$b^2<a$
7	b لا يقسم a	49	$b^2<a$
11	b لا يقسم a	121	$b^2<a$
13	b لا يقسم a	169	$b^2<a$
17	b لا يقسم a	289	$b^2<a$
19	b لا يقسم a	361	$b^2<a$
23	b لا يقسم a	529	$b^2<a$

و منه لا يوجد عدد أولي b يقسم a بحيث $b^2\le a$ و عليه a عدد أولي .

2) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة : $x^2-y^2=503$

لدينا : 503 عدد أولي و لدينا : $(x-y)(x+y)=503$ و بما أن $x-y<x+y$

فإن $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=503 \end{cases}$ و بالجمع نجد : $2x=504$ و بالتالي : $x=252$

إذن $(252;251)$ حل للمعادلة .

التمرين 2 : --

1) $60=2^2\times 3\times 5$

2) عدد قواسم 60 : $(1+2)(1+1)(1+1)=12$ و منه عدد قواسم 60 هو 12 .

3) تعيين قواسم 60 :

كل قاسم للعدد 60 يكون من الشكل : $2^\alpha\times 3^\beta\times 5^\delta$

حيث $0\le\alpha\le 2$ و $0\le\beta\le 1$ و $0\le\delta\le 1$

قيم α	قيم β	قيم δ	القاسم $2^\alpha.3^\beta.5^\delta$
$\alpha=0$	$\beta=0$	$\delta=0$	1
		$\delta=1$	5
	$\beta=1$	$\delta=0$	3
		$\delta=1$	15
$\alpha=1$	$\beta=0$	$\delta=0$	2
		$\delta=1$	10
	$\beta=1$	$\delta=0$	6
		$\delta=1$	30
$\alpha=2$	$\beta=0$	$\delta=0$	4
		$\delta=1$	20
	$\beta=1$	$\delta=0$	12
		$\delta=1$	60

و عليه قواسم 60 هي : 30، 60، 20، 15، 12، 10، 6، 5، 4، 3، 2، 1.

التمرين 3 : --

1) التحليل:

$$A=44\times 88\times 96=4\times 11\times 8\times 11\times 24\times 4$$

$$A=2^2\times 11\times 2^3\times 11\times 2^3\times 3\times 2^2$$

$$A=2^{10}\times 3\times 11^2$$

$$B=35\times 56\times 78=5\times 7\times 8\times 7\times 39\times 2$$

$$B=5\times 7\times 2^3\times 7\times 3\times 13\times 2$$

$$B=2^4\times3\times5\times7^2\times13$$

2)-حساب: $PPCM(A;B)$

$$PPCM(A;B)=2^4\times3=48$$

3)-حساب: $PGCD(A;B)$

$$PGCD(A;B)=2^{10}\times3\times5\times7^2\times11^2\times13$$
$$=1183902720$$

التمرين 4:

$$PGCD(30000;170000)=PGCD(3.10^4;17.10^4)$$
$$=10^4\,PGCD(3;17)$$
$$=10^4\times1=10^4$$

$$PPCM(30000;170000)=PPCM(3.10^4;17.10^4)$$
$$=10^4\,PPCM(3;17)$$
$$=10^4\times3\times17$$
$$=510000$$

التمرين 5:

ايجاد أصغر عدد طبيعي b له10 قواسم :

يكون b أصغر ما يمكن إذا كان له أصغر عدد ممكن من العوامل الأولية و كان مجموع قواسمه 10. أي b إما له عامل واحد أولي أو عاملان .

و منه : $b=a^{\alpha}$ أو $b=a_1^{\alpha1}\times a_2^{\alpha2}$

إذا كان $b=a^{\alpha}$ فإن $1+\alpha=10$ أي $\alpha=9$

و إذا كان : $b=a_1^{\alpha1}\times a_2^{\alpha2}$ فإن : $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)=10$

و عليه : $\begin{cases}1+\alpha_1=1\\1+\alpha_2=10\end{cases}$ أو $\begin{cases}1+\alpha_1=2\\1+\alpha_2=5\end{cases}$ أو $\begin{cases}1+\alpha_1=5\\1+\alpha_2=2\end{cases}$

أي : $\begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=9\end{cases}$ أو $\begin{cases}\alpha_1=1\\\alpha_2=4\end{cases}$ أو $\begin{cases}\alpha_1=4\\\alpha_2=1\end{cases}$

و عليه $b=a_2^9$ أو $b=a_1\times a_2^4$ أو $b=a_1^4\times a_2$

إذن يكون b أصغر ما يمكن إذا كانت العوامل الأولية في التحليل أصغر ما يمكن أي :

$b=2^4\times3$ أو $b=2\times3^4$ أو $b=2^9$

و عليه : $b=48$ أو $b=162$ أو $b=512$

إذن أصغر عدد هو 48 و عدد قواسمه 10.

التمرين 6 :

---

1) حل المعادلة : $9x-22y=55$

لدينا $9x=22y+55$ و عليه : $9x=11(2y+5)$

لدينا 11 يقسم $9x$ و 11أولي مع 9

و عليه 11 يقسم x حسب نظرية غوص .و منه : $x=11x'$

بالتعويض في (1) نجد: $9\times11x'-11.2y=5\times11$

و بالتالي : $(2).......9x'-2y=5$

نلاحظ أن $(1;2)$ حل للمعادلة (2) و عليه $9\times1-2\times2=5$

و منه : $9x'-2y=9\times1-2\times2$ أي $(3)...9(x'-1)=2(y-2)$

لدينا : 2 تقسم $9(x'-1)$ و 2 أولي مع 9 . ومنه حسب نظرية غوص : 2 يقسم $x'-1$

إذن : $x'-1=2k$ و عليه : $x'=2k+1$ و منه : $x=11(2k+1)$

بالتعويض في (3)نجد: $9\times2k=2(y-2)$ إذن $y-2=9k$

و منه : $y=9k+2$

و عليه حلول المعادلة (1) هي كل الثنائيات $(22k+11,9k+2)$ مع k يمسح $\mathbb{Z}$.

2 - تعيين حلول (1)بحيث : $PGCD(x;y)=55$

إذن : $x=55x'$ و $y=55y'$ مع x' و y' أوليا فيما بينهما

بالتعويض في (1) نجد : $9\times55x'-22.55y'=55$

و عليه : $(4)......9x'-22y'=1$

حيث y' و x' أوليان فيما بينهما . نلاحظ أن الثنائية $(5;2)$ حل للمعادلة (4)

و منه : $9x'-22y'=9\times5-22\times2$

و عليه : $(5)......9(x'-5)=22(y'-2)$

لدينا 9 يقسم $22(y'-2)$ 9 أولي مع 22 ومنه 9 يقسم $y'-2$ أي $y'-2=9\alpha$

أي: $y'=9\alpha+2$ و بالتعويض في (5) نجد : $9(x'-5)=22.9\alpha$

و منه : $x'-5=22\alpha$ و بالتالي $x'=22\alpha+5$.

إذن : $x=55(22\alpha+5)$ و $y=55(9\alpha+2)$ و عليه الحلول هي الثنائية

$(x_1;y_1)$ حيث: $x_1=1210\alpha+275$ $y_1=495\alpha+110$ مع $\alpha\in\mathbb{Z}$

التمرين 7:

تعيين a و b و c و d $10a^2=d-b$

لدينا : $b=aq$ ، $c=aq^2$ ، $d=aq^3$ وعليه : $10a^2=aq^3-aq$

إذن : $10a^2=qa\left(q^2-1\right)$ و منه : $10a=q\left(q^2-1\right)$

لدينا q أولي مع a و q يقسم $10a$. و بالتالي q يقسم 10 .

إذن القيم الممكنة للعدد q هي : 2، 5 ، 10 لأن $(q>1)$

- من أجل $q=2$: $10a=2\left(2^2-1\right)$ و منه : $5a=3$ مرفوض
- من أجل $q=5$: $10a=5\left(5^2-1\right)$ و منه : $2a=24$

إذن $a=12$ و عليه : $b=60$ ، $c=300$ ، $d=1500$

- من أجل $q=10$: $10a=10\left(10^2-1\right)$ و منه $a=99$

إذن $b=990$ ، $c=9900$ ، $d=99000$

التمرين 8 : --

1)إيجاد الأعداد التي مربع كل منها يقسم 1980

$$1980=2^2\times3^2\times5\times11$$

إذن الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 1980 هي: 1،2،3،6 .

1)تعيين الأعداد a و b :

لدينا : $a=\delta a'$ و $b=\delta b'$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما . و لدينا : $\delta.\mu=a.b$

و منه: $\delta.\mu=\delta a'.\delta b'$ أي: $\mu=\delta a'b'$ وبالتعويض في العلاقة $\mu^2-5\delta^2=1980$

نجد : $\left(\delta a'b'\right)^2-5\delta^2=1980$ و منه : $\delta^2\left(a'^2b'^2-5\right)=1980 ...(1)$

و بالتالي : δ^2 يقسم 1980 . إذن القيم الممكنة للعدد δ هي : 6,3,2,1 .

1. من أجل $\delta=1$: (1) تكافئ : $a'^2b'^2-5=1980$

إذن: $a'^2b'^2=1985$ ومنه : $a'b'=\sqrt{1985}$ (مرفوض) .

2. من أجل $\delta=2$: (1) تكافئ: $a'^2b'^2-5=495$

إذن : $a'^2b'^2=500$ ومنه : $a'b'=\sqrt{500}$ (مرفوض) .

3. من أجل $\delta=3$:(1) تكافئ: $a'^2b'^2-5=220$

إذن : $a'^2b'^2=225$ وعليه: $a'b'=15$

وعليه : $a'b'=15$ و a' و b' أوليان فيما بينهما .

- $a'=1$ و $b'=15$: $a=3$ و $b=45$
- $a'=3$ و $b'=5$: $a=9$ و $b=15$
- $a'=15$ و $b'=1$: $a=45$ و $b=3$
- من أجل $\delta=6$: (1)تكافئ: $a'^2b'^2-5=330$

إذن : $a'b'=\sqrt{335}$ (مرفوض).

و عليه : $a=3$ و $b=45$ أو $a=9$ و $b=15$ أو $a=45$ و $b=3$

التمرين 9 : --

تعيين a و b:

لدينا : $a=\delta a'$ و $b=\delta b'$ مع a' و b' أوليان فيما بينهما . و لدينا : $\delta.\mu=a.b$

و منه : $\mu=\delta a'b'$ و بما أن : $11\delta+7\mu=1989$

فإن : $11\delta+7\delta a'b'=1989$ إذن : $\delta\left(11+7a'b'\right)=1989 ...(1)$

و عليه $\delta/1989$ لكن : $1989=3^2\times13\times17$. وعليه δ من قواسم 1989.

قواسم 1989هي : 1، 3 ، 9 ، 13 ، 17 ، 39 ، 51 ، 117 ، 153، 221، 663 ، 1989 .

بالتعويض في (1):

1) $\delta=1$: $11+7a'b'=1989$ و منه $a'b'=\frac{1978}{7}$ مرفوض .

2) $\delta=3$: $11+7a'b'=1989$ ومنه $a'b'=\frac{652}{7}$ مرفوض .

3) $\delta=9$: $11+7a'b'=221$ و منه $a'b'=30$

لما $a'=1$ و $b'=30$: $a=9$ و $b=270$

لما $a'=2$ و $b'=15$: $a=18$ و $b=135$

لما $a'=3$ و $b'=10$: $a=27$ و $b=90$

لما $a'=5$ و $b'=6$: $a=45$ و $b=54$

4) $\delta=13$: $11+7a'b'=153$ و منه $a'b'=\frac{142}{7}$ مرفوض .

5) $\delta=17$: $11+7a'b'=117$ و منه $a'b'=\frac{106}{7}$ مرفوض .

6) $\delta=39$: $11+7a'b'=51$: و منه $a'b'=\frac{40}{7}$ مرفوض .

7) $\delta=51$: $11+7a'b'=39$ و منه $a'b'=4$ و منه

$a'=1$ و $b'=4$ وعليه $a=51$ و $b=204$

8) $\delta=117$: $11+7a'b'=17$ و منه $a'b'=\frac{6}{7}$ مرفوض .

9) $\delta=153$: $11+7a'b'=13$ و منه $a'b'=\frac{2}{7}$ مرفوض .

10) $\delta=221$: $11+7a'b'=9$ و منه $a'b'=-\frac{2}{7}$ مرفوض .

11) $\delta=663$: $11+7a'b'=3$ مرفوض .

12) $\delta = 1989$: $11 + 7a'b' = 1$ مرفوض .

التمرين 10 :

---

1) حساب $PGCD(2490;32785;2905)$

لدينا : $2490 = 2\times3\times5\times83$ ، $32785 = 5\times83\times79$ ، $2905 = 5\times7\times83$

و منه : $PGCD(2490;32785;2905) = 5\times83 = 415$

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة :

$7x+6y=79$ لدينا : $79 = 7+72$ و منه : $7\times1+6(12)=79$

إذن : $(1;12)$ حل خاص للمعادلة (1). و منه : $7x+6y=7(1)+6(12)$

و عليه : $(2).......7(x-1)=6(-y+12)$

6 يقسم $7(x-1)$ و 6 أولي مع 7 و منه 6 يقسم $x-1$

إذن $x-1=6k$ ومنه $x=6k+1$ و $k\in\mathbb{Z}$

بالتعويض في (2) نجد : $7\times6k=6(-y+12)$ و منه : $-y+12=7k$

و عليه $y=-7k+12$

مجموعة الحلول هي كل الثنائيات من الشكل : $(6k+1;-7k+12)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

2)إيجاد عدد اللاعبين و عدد اللاعبات :

نفرض x هو عدد اللاعبين و y عدد اللاعبات فيكون :

$2905x+2490y=32785$ بالقسمة على 415 نجد :

$7x+6y=79$ و منه $x=6k+1$ و $y=-7k+12$

حيث : $x>0$ و $y>0$ أي $k>-\frac{1}{6}$ و $k<\frac{12}{7}$ إذن : $k=0$ أو $k=1$.

و منه قيم $(x;y)$ هي : $(1;12)$ أو $(7;5)$

التمرين 11:

---

1)حل معادلة : $(1)......5x-3y=7$

لدينا : $(2;1)$ حل خاص و منه : $5x-3y=5(2)-3(1)$

و عليه : $(2).......5(x-2)=3(y-1)$

لدينا 5 يقسم $3(y-1)$ و 5أولي مع 3 و منه 5 يقسم $y-1$

إذن $y-1=5k$ و عليه : $y=5k+1$ و $k\in\mathbb{Z}$ بالتعويض في (2) نجد :

$5(x-2)=3.5k$ إذن : $x-2=3k$ و عليه : $x=3k+2$

إذن حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x;y)$

حيث : $x=3k+2$ و $y=5k+1$ مع $k\in\mathbb{Z}$

تعيين القيم الممكنة لـ : $PGCD(x;y)$

كل قاسم للعددين x و y هو قاسم للعدد $5x-3y$ و منه فهو قاسم للعدد 7 و عليه القيم الممكنة لـ : $PGCD(x;y)$ هي 7 و 1 .

2)تعيين x,y بحيث يكون $PGCD(x;y)$ أكبر ما يمكن

أي : $PGCD(x;y)=7$

و عليه : $\begin{cases}x=7x'\\y=7y'\end{cases}$ بحيث x' و y' أوليان فيما بينهما .

بالتعويض في (1) نجد : $5.7x'-3.7y'=7$ و منه : $7(5x'-3y')=7$

و عليه : $5x'-3y'=1$ نلاحظ أن : $(2;3)$ حل خاص و منه :

$5x'-3y'=5(2)-3(3)$ و عليه : $(3)...5(x'-2)=3(y'-3)$

5 يقسم $3(y'-3)$ و 5 أولى مع 3 و منه 5يقسم $y'-3$ و عليه : $y'-3=5\alpha$

أي : $y'=5\alpha+3$ بالتعويض في (3) نجد : $5(x'-2)=3.5\alpha$

و عليه : $x'-2=3\alpha$ و منه : $x'=3\alpha+2$

إذن : $x=7(3\alpha+2)$ و $y=7(5\alpha+3)$

أي : $x=21\alpha+14$ و $y=35\alpha+21$ مع $\alpha\in\mathbb{Z}$

التمرين 12:

---

1) تبيان أن $\alpha\equiv0[7]$:

لدينا: $44x-35y=7$ و منه : $44x=35y+7$ وعليه : $44x=7(5y+1)$

7 يقسم $44x$ و 7 أولى مع 44 و منه 7 يقسم x . إذن : $x\equiv0[7]$

2) تعيين الحل الخاص $(x_0;y_0)$:

لدينا : $44x_0-35y_0=7$ و لدينا : $x_0\equiv0[7]$ و عليه : $x_0=7\alpha$

و منه : $44.7\alpha-35y_0=7$ إذن : $44\alpha-5y_0=1$ و عليه : $y_0=\frac{1}{5}(44\alpha-1)$

من أجل $\alpha=0$: $y_0=-\frac{1}{5}$ مرفوض .

- من أجل $\alpha=1$: $y_0=\frac{43}{5}$ مرفوض .
- من أجل $\alpha=2$: $y_0=\frac{87}{5}$ مرفوض .
- من أجل $\alpha=3$: $y_0=\frac{131}{5}$ مرفوض .
- من أجل $\alpha=4$: $y_0=35$.إذن : $(x_0;y_0)=(28;35)$

حل المعادلة (1) : لدينا : $44x-35y=44\times28-35\times35$

و عليه : $44(x-28)=35(y-35)$ ......(2)

لدينا 35 يقسم $44(x-28)$ و 35 و 44 أولى مع 44 ومنه 35 يقسم $x-28$

إذن : $x-28=35\alpha$ أي $x=35\alpha+28$ حيث $\alpha\in\mathbb{Z}$

بالتعويض في (2) نجد : $44(35\alpha)=35(y-35)$ و منه :

$y-35=44\alpha$ و عليه : $y=44\alpha+35$

حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث $x=35\alpha+28$ و $y=44\alpha+35$

3)تعيين القيم الممكنة لـ : $PGCD(x;y)$

كل قاسم للعددين x و y هو قاسم للعدد : $44x-35y$

و منه هو قاسم للعدد 7 .لكن قواسم 7 هي : 1 و 7 .

و عليه القيم الممكنة لـ $PGCD$ هي 1و 7 .

4) تعيين $(x;y)$ بحيث : $PGCD(x;y)=7$

$PGCD(x;y)=7$ معناه : $x=7x'$ و $y=7y'$ / x' و y' أوليان فيما بينهما .

بالتعويض في (1) نجد : $44x'-35y'=1$ ....(3)

نبحث عن حل خاص :

لدينا : $(28;35)$ حل خاص للمعادلة (1) و منه: $(4;5)$ حل خاص للمعادلة (3)

و عليه : $44x'-35y'=44(4)-35(5)$

إذن : $44(x'-4)=35(y'-5)$ ....(4)

44 يقسم $35(y'-5)$ و 44 أولى مع 35 ومنه 44 يقسم $y'-5$ أي $y'-5=44\alpha$

إذن : $y'=44\alpha+5$ بالتعويض في (4) نجد : $44(x'-4)=35.44\alpha$

و منه : $x'-4=35\alpha$ و منه : $x'=35\alpha+4,\ \alpha\in\mathbb{Z}$

و منه: $x=7(35\alpha+4)$ و $y=7(44\alpha+5)$

إذن: $x=245\alpha+28$ و $y=308\alpha+35$

5) تعيين الحلول $(x;y)$ بحيث :

x و y أوليان فيما بينهما أي $PGCD(x;y)=1$ مما سبق لدينا : $x\equiv0[7]$ أي x مضاعف 7 و عليه حتى يكون $PGCD(x;y)=1$ يجب أن يكون y ليس مضاعفا للعدد 7.

إذا كان $y\equiv0[7]$ فإن مما سبق $308\alpha+35\equiv0[7]$

و عليه : $3\alpha\equiv0[7]$ و منه $5\times3\alpha\equiv0[7]$ أي $\alpha\equiv0[7]$

أي $\alpha=7\beta$. حيث $\beta\in\mathbb{Z}$

أما إذا كان y ليس مضاعفا للعدد 7 فإن: $\alpha\neq7\beta$

أي $y=308\alpha+35$ مع α ليس مضاعفا للعدد 7.

6) تعيين $(x;y)$ حلول (1) بحيث : $x^2+y^2<2009$

أي: $(35\alpha+28)^2+(44\alpha+35)^2<2009$

$$1225\alpha^2+1960\alpha+784+1936\alpha^2+3080\alpha+1225<2009$$

$3161\alpha^2+5040\alpha+2009<2009$ إذن : $\alpha(3161\alpha+5040)<0$

و عليه : $\alpha\in\left]-\frac{5040}{3161};0\right[$ أي $\alpha\in]-1,6;0[$

أي أن : $\alpha=-1$ و منه : $(x;y)=(-7;-11)$

18 – المقاطع المستوية للسطوح

I – الأسطوانة القائمة :

1- تعريف :

نسمي أسطوانة قائمة مجموعة نقط الفضاء التي تبعد بعدا ثابتا α عن مستقيم ثابت (Δ).

α : يسمى نصف قطر الأسطوانة . (Δ) : يسمى محور الأسطوانة .

وهي أيضا مجموعة نقط المستقيمات التي توازي (Δ) وتستند على دائرة (C) نصف قطرها α

2- معادلة أسطوانة محورها $(o\ ;\ \vec{k})$:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$.

(γ) أسطوانة محورها $(o\ ;\ \vec{k})$ و نصف قطرها α .

تكون نقطة $M\ (x\ ;y\ ;z)$ من الفضاء من (γ) إذا وفقط إذا كان مسقطها العمودي $M'\ (x\ ;y\ ;o)$ على $(o\ ;\ \vec{i}\ ,\vec{j})$ ومنه $O'M^2 = OM'^2 = \alpha^2$ وعليه

$x^2+y^2=\alpha^2$ هي معادلة الأسطوانة التي محورها $(o\ ;\ \vec{k})$ و نصف قطرها α .

3- معادلة أسطوانة محورها $(o\ ;\ \vec{j})$ و نصف قطرها α $\quad x^2+z^2=\alpha^2$

4- معادلة أسطوانة محورها $(o\ ;\ \vec{i})$ و نصف قطرها α $\quad y^2+z^2=\alpha^2$

5- مقاطع أسطوانية :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$ نعتبر الأسطوانة (γ) ذات المعادلة $x^2+y^2=\alpha^2$. (P) مستو يوازي أحد المستويات الإحداثية .

أ) إذا كانت معادلة (P) هي $z=k$ فإن : $(P)\cap(\gamma) : \begin{cases} x^2+y^2=\alpha^2 \\ z=k \end{cases}$

وعليه $(P)\cap(\gamma)$ هو دائرة .

ب) إذا كانت معادلة (P) هي $y=k$ فإن : $(P)\cap(\gamma) : \begin{cases} x^2=\alpha^2-k^2 \\ y=k \end{cases}$

* إذا كان $k^2>\alpha^2$ فإن $(P)\cap(\gamma)$ خالية .
* إذا كان $k^2=\alpha^2$ فإن $(P)\cap(\gamma)$ هي مستقيم .
* إذا كان $k^2<\alpha^2$ فإن $(P)\cap(\gamma)$ هي اتحاد مستقيمين .

ج) إذا كانت معادلة (P) هي $x=k$ فإن : $(P)\cap(\gamma) : \begin{cases} y^2=\alpha^2-k^2 \\ x=k \end{cases}$

* إذا كان $k^2>\alpha^2$ فإن $(P)\cap(\gamma)=\phi$.
* إذا كان $k^2=\alpha^2$ فإن $(P)\cap(\gamma)$ هي مستقيم .
* إذا كان $k^2<\alpha^2$ فإن $(P)\cap(\gamma)$ هي اتحاد مستقيمين .

II – المخروط الدوراني :

1- تعريف :

(Δ) مستقيم ثابت . ω نقطة ثابتة على (Δ) . (D) مستقيم متغير يشمل ω و يصنع زاوية ثابتة θ مع (Δ) . مجموعة المستقيمات (D) تسمى مخروطا دورانيا رأسه ω محوره (Δ) و نصف زاوية رأسه θ حيث θ زاوية حادة .

2- معادلة مخروط الدوران الذي رأسه O و محوره $(o\ ;\ \vec{k})$:

لتكن $M\ (x\ ;y\ ;z)$ نقطة المخروط و ليكن $P\ (o\ ;o\ ;z)$ مسقطها العمودي على $(o\ ;\ \vec{k})$. لدينا $\overrightarrow{OM}\ (x\ ;y\ ;z)$ ، $\vec{k}\ (0\ ;0\ ;1)$

لدينا من جهة : $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{k}=z\ ...\ (1)$ و من جهة أخرى :

أي $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{k}=\|\overrightarrow{OM}\|\cdot\|\vec{k}\|\cdot\cos\theta$

$$\overrightarrow{OM}\cdot k=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\times 1\times\cos\theta\ ...\ (2)$$

ومنه من 1 و 2 : $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\times\cos\theta=z$ إذن :

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\times\cos^2\theta=z^2$$

و منه : $x^2+y^2+z^2=\dfrac{z^2}{\cos^2\theta}$ إذن : $x^2+y^2+z^2=z^2\left(1+\tan^2\theta\right)$

وبالتالي : $x^2+y^2-z^2\tan^2\theta=0$

وهي معادلة المخروط الدوراني الذي رأسه O و نصف زاوية رأسه θ ومحوره $(o\ ;\ \vec{k})$.

3- معادلة مخروط الدوراني الذي رأسه O و نصف زاوية رأسه θ و محوره $(o\ ;\ \vec{j})$:

$$x^2+z^2-y^2\tan^2\theta=0$$

4- معادلة مخروط الدوران الذي رأسه O و نصف زاوية رأسه θ و محوره $(o\ ;\ \vec{i})$:

$$y^2+z^2-x^2\tan^2\theta=0$$

5- مقاطع مخروطية :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$ نعتبر المخروط الدوراني (R) الذي معادلته $x^2 + y^2 - a^2z^2 = 0$ حيث $a^2 = \tan^2\theta$ و المستوي (P) الموازي لأحد المحاور الإحداثية .

أ) إذا كانت معادلة (P) هي $z = k$ فإن :

$$(P)\cap(R) : \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2k^2 \\ z = k \end{cases}$$

* إذا كان $k = 0$ فإن $(P)\cap(R)$ هي النقطة O .
* إذا كان $k \neq 0$ فإن $(P)\cap(R)$ هي دائرة .

ب) إذا كانت معادلة (P) هي $y = k$ فإن

$$(P)\cap(R) : \begin{cases} x^2 + y^2 - a^2z^2 = 0 \\ y = k \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} x^2 - a^2z^2 = -k \\ y = k \end{cases}$$

* إذا كان $k = 0$ فإن $(P)\cap(R)$ هي اتحاد مستقيمين .
* إذا كان $k \neq 0$ فإن $(P)\cap(R)$ هي قطع زائد .

جـ) إذا كانت معادلة (P) هي $x = k$ فإن

$$(P)\cap(R) : \begin{cases} x^2 + y^2 - a^2z^2 = 0 \\ x = k \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} y^2 - a^2z^2 = -k^2 \\ x = k \end{cases}$$

* إذا كان $k = 0$ فإن $(P)\cap(R)$ هي اتحاد مستقيمين .
* إذا كان $k \neq 0$ فإن $(P)\cap(R)$ هي قطع زائد .

III – المجسم المكافئ :

1- تعريف :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$ المعادلة $z = x^2 + y^2$: هي لمجسم مكافئ.

2- مقاطع مجسم مكافئ :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس نعتبر المجسم المكافئ (L) ذو المعادلة $z = x^2 + y^2$ و نعتبر المستوي (P) الموازي لأحد المستويات الإحداثية .

لنبحث عن $(L)\cap(P)$.

أ) إذا كان : $z = k$: (P) فإن

$$(L)\cap(P) : \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = k \end{cases}$$

وعليه :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = k \\ z = k \end{cases}$$

* إذا كان $k < 0$ فإن $(L)\cap(P) = \phi$.
* إذا كان $k = 0$ فإن $(L)\cap(P) = \{0\}$.
* إذا كان $k > 0$ فإن $(L)\cap(P)$ دائرة .

ب) إذا كان $(P) : y = k$ فإن

$$(L)\cap(P) : \begin{cases} z = x^2 + k^2 \\ y = k \end{cases}$$

وعليه $(L)\cap(P)$ هي قطع مكافئ .

جـ) إذا كان $(P) : x = k$ فإن

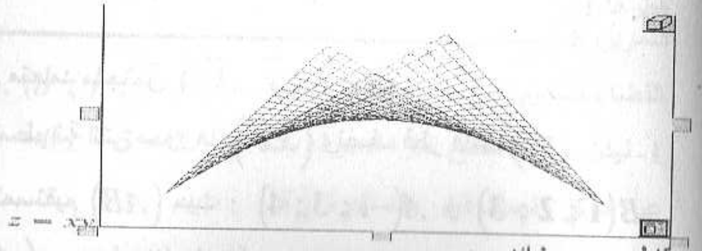
$$(L)\cap(P) : \begin{cases} z = k^2 + y^2 \\ x = k \end{cases}$$

وعليه $(L)\cap(P)$ هي قطع مكافئ .

IV- المجسم الزائدي :

1- تعريف :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$ المعادلة $z = x\ .\ y$ هي لمجسم زائدي .



2- مقاطع مجسم زائدي :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$ نعتبر المجسم الزائدي (H) الذي معادلته $z = x\ .\ y$ ونعتبر المستوي (P) الموازي لأحد المستويات الإحداثية .

لنبحث عن $(H)\cap(P)$.

أ) إذا كان $(P): z=k$ فإن $(H)\cap(P):\begin{cases} z=x\cdot y\\ z=k\end{cases}$ ومنه:

$$\begin{cases} x\cdot y=k\\ z=k\end{cases}$$

* إذا كان $k=0$ فإن $(H)\cap(P)$ هو إتحاد مستقيمين .
* إذا كان $k\neq 0$ فإن $(H)\cap(P)$ هو قطع زائد .

ب) إذا كان $(P): y=k$ فإن $(H)\cap(P):\begin{cases} x\cdot y=k\\ y=k\end{cases}$

وعليه $(H)\cap(P):\begin{cases} z=kx\\ y=k\end{cases}$ ومنه $(H)\cap(P)$ هي مستقيم .

ج) إذا كان $(P): x=k$ فإن $(H)\cap(P):\begin{cases} x\cdot y=z\\ x=k\end{cases}$

وعليه $(H)\cap(P):\begin{cases} z=ky\\ x=k\end{cases}$ ومنه $(H)\cap(P)$ هي مستقيم .

التمارين

التمرين 1 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. أكتب معادلة سطح الأسطوانة التي محورها (zz') وتشمل النقطة $A(-1;2;1)$.

التمرين 2 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1- أكتب معادلة سطح الأسطوانة التي محورها (xx') ونصف قطر قاعدتها 5 .

2- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) حيث : $A(-1;3;4)$ و $B(1;2;3)$

3- عين نقط تقاطع (AB) مع سطح الأسطوانة .

التمرين 3 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1- أكتب معادلة سطح الأسطوانة (γ) ذات المحور (yy') وتشمل النقطة $C(-1;1;2)$.

2- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $B(1;1;-3)$ و الشعاعين $\vec{i};\vec{k}$. 3- عين نقط تقاطع (γ) و (P) .

التمرين 4 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$A(2;-1;1)$ نقطة من الفضاء .

- أكتب معادلة للسطح المخروطي الذي رأسه O ومحوره $(o;\vec{j})$ ويشمل A .

التمرين 5 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

أكتب معادلة للسطح المخروطي الذي رأسه O و محوره $(o;\vec{i})$ و زاوية رأسه $\frac{\pi}{3}$

التمرين 6 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1- أكتب معادلة للسطح المخروطي الدوراني (S) الذي رأسه O ومحوره $(o;\vec{k})$ و زاوية رأسه $\frac{\pi}{4}$. 2- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1;-2;1)$ والشعاعين $\vec{i};\vec{j}$. 3- عين نقط تقاطع (S) والمستوي (P) .

التمرين 7 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

أكتب معادلة المخروط الذي رأسه م و المحيط بالكرة التي مركزها $\omega(0;2;0)$ ونصف قطرها 1 .

التمرين 8 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1- ليكن (S) سطح الكرة المعرفة بالعلاقة : $x^2+y^2+z^2-6x+5=0$

عين مركز ونصف قطر هذه الكرة (S) .

2- أكتب معادلة سطح الأسطوانة التي تحيط بالكرة (S) ومحورها $(o;\vec{i})$.

3- أكتب معادلة سطح المخروط المحيط بالكرة (S) ورأسه O ومحوره $(o;\vec{i})$.

التمرين 9 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$. نعتبر النقطة $A(0\ ;\ 0\ ;\ 2)$. أكتب معادلة المخروط الذي رأسه A ونصف زاوية رأسه $\frac{\pi}{6}$.

التمرين 10 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$.

1- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(0;\ 0;\ 2)$ وشعاع توجيهه $\vec{j}$.

2- أكتب معادلة الأسطوانة التي محورها (Δ) ونصف قطرها 1 .

الحلول

التمرين 1 :

معادلة سطح الأسطوانة : $x^2+y^2=\alpha^2$

وبما أن الأسطوانة تشمل $A(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$ فإن : $(-1)^2+(2)^2=\alpha^2$

وعليه : $\alpha^2=5$ إذن معادلة سطح الأسطوانة هي : $x^2+y^2=5$

التمرين 2 :

1- معادلة سطح الأسطوانة : $y^2+z^2=(5)^2$ أي $y^2+z^2=25$

2- تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) :

تكون نقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (AB) إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AM}=t.\overrightarrow{AB}$

وعليه $\begin{cases} x+1=t(1+1) \\ y-3=t(2-3) \\ z-4=t(3-4) \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=-t+3 \\ z=-t+4 \end{cases}$

وهو التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) .

3- تعيين نقط تقاطع (AB) مع سطح الأسطوانة :

نحل الجملة $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=-t+3 \\ z=-t+4 \\ y^2+z^2=25 \end{cases}$ وعليه $(-t+3)^2+(-t+4)^2=25$

ومنه $t^2-6t+9+t^2-8t+16=25$

$2t^2-14t+25=25$

إذن $2t^2-14t=0$ ومنه $2t(t-7)=0$ إما $t=0$ أو $t=7$

ومنه $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=13 \\ y=-4 \\ z=-3 \end{cases}$

ومنه المستقيم (AB) يقطع السطح الأسطواني في النقطتين $A(-1\ ;\ 3\ ;\ 4)$ و $C(13\ ;\ -4\ ;\ -3)$.

التمرين 3 :

1- معادلة السطح الأسطواني : $(\gamma): x^2+z^2=\alpha^2$

وبما أن $C\in(\gamma)$ فإن $(-1)^2+(4)^2=\alpha^2$ ومنه $\alpha^2=17$

وعليه $\alpha=\sqrt{17}$ إذن $(\gamma): x^2+z^2=17$

2- التمثيل الوسيطي للمستوي (P) :

تكون نقطة $M(x;y;z)$ من المستوي (P) إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{BM}=t\vec{i}+t'\vec{k}$

وعليه $\begin{cases} x-1=t(1)+t'(0) \\ y-1=t(0)+t'(0) \\ z+3=t(0)+t'(1) \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=t+1 \\ y=1 \\ z=t'-3 \end{cases}$

3- تعيين نقط تقاطع (γ) و (P) :

نحل الجملة $\begin{cases} x=t+1 \\ y=1 \\ z=t'-3 \\ x^2+z^2=17 \end{cases}$ فنجد $\begin{cases} x^2+z^2=17 \\ y=1 \end{cases}$

إذن P تقطع الأسطوانة (γ) وفق الدائرة ذات المركز $\omega(0;\ 1;\ 0)$ و نصف القطر $\sqrt{17}$

التمرين 4 :

معادلة السطح المخروطي $x^2+z^2-y^2\tan^2\theta=0$.بما أن A نقطة من المخروط

فإن $(2)^2+(1)^2-(-1)^2\tan^2\theta=0$ وعليه $5-\tan^2\theta=0$

ومنه : $\tan^2\theta = 5$ وعليه معادلة المخروط : $x^2+z^2-5y^2=0$

التمرين 5 :

معادلة المخروط : $y^2+z^2-x^2\tan^2\theta=0$

وعليه نصف زاوية الرأس هي $\frac{\pi}{6}$ أي $\theta=\frac{\pi}{6}$ ومنه $y^2+z^2-x^2\tan^2\frac{\pi}{6}=0$

ومنه معادلة المخروط هي $y^2+z^2-\frac{1}{3}x^2=0$ لأن $\tan^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}$

التمرين 6 :

1- معادلة السطح المخروطي : $x^2+y^2-z^2\tan^2\theta=0$

وبالتالي $x^2+y^2-z^2\tan^2\frac{1}{4}=0$ إذن $x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2=0$

2- التمثيل الوسيطي للمستوى $\left(A\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$

تكون نقطة $M(x\,;y\,;z)$ من هذا المستوي إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AM}=t\vec{i}+t'\vec{j}$

وعليه $\begin{cases} x-1=t \\ y+2=t' \\ z-1=0 \end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases} x=t+1 \\ y=t'-2 \\ z=1 \end{cases}$

3- تعيين نقط التقاطع :

نحل الجملة $\begin{cases} x=t+1 \\ y=t'-2 \\ z=1 \\ x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2=0 \end{cases}$ وعليه $x^2+y^2-\frac{1}{2}(1)^2=0$

إذن $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ وعليه $\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{cases}$

ومنه يتقاطع المخروط و الأسطوانة وفق الدائرة المعرفة أعلاه . أي الدائرة ذات المركز

$\omega(0\,;0\,;1)$ ونصف القطر $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

التمرين 7 :

معادلة المخروط هي $x^2+z^2-y^2\tan^2\theta=0$

لدينا $\tan\theta=\frac{\omega p}{op}$ حيث $o\omega=1$ ، $\omega p=1$

ولدينا $o\omega^2=op^2+p\omega^2$ ومنه $op^2=o\omega^2-p\omega^2=(2)^2-(1)^2$

إذن $op^2=3$ وعليه $op=\sqrt{3}$ إذن $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

وعليه معادلة المخروط تصبح $x^2+z^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2y^2=0$

أي $x^2+z^2-\frac{1}{3}y^2=0$

التمرين 8 :

1- تعيين المركز ونصف القطر للكرة (S) :

لدينا : $x^2+y^2+z^2-6x+5=0$

ومنه : $(x-3)^2-9+y^2+z^2-4=0$ وعليه : $(x-3)^2+y^2+z^2=4$

إذن مركز الكرة هي النقطة $A(3\,;0\,;0)$ ونصف قطرها $r=2$.

2- تعيين معادلة سطح الأسطوانة المحيطة بهذه الكرة :

محور الأسطوانة المحيطة بالكرة هو $\left(o\,;\vec{i}\right)$ ونصف قطر قاعدة الأسطوانة

هو 2 فتكون معادلة الأسطوانة كما يلي : $y^2+z^2=4$.

3- معادلة المخروط :

محور المخروط هو $\left(o\,;\vec{i}\right)$ وعليه تكون معادلته من الشكل $y^2+z^2-x^2\tan^2\theta=0$

لدينا : $\tan\theta=\frac{AP}{OP}$ حيث $AP=2$ ، $OA=3$

ولدينا في المثلث OAP القائم في P : $OA^2=OP^2+AP^2$

وعليه $OP^2=OA^2-AP^2$ أي $OP^2=9-4=5$ ومنه $OP=\sqrt{5}$

إذن $\tan\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ أي $\tan^2\theta=\frac{4}{5}$

ومنه معادلة المخروط تصبح $y^2+z^2-\frac{4}{5}x^2=0$.

التمرين 9 : --

نقوم بسحب المعلم . لتكن $M\left(x\,;y\,;z\right)$ في المعلم $\left(o\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$

لدينا $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$ نفرض أن $M\left(x'\,;y'\,;z'\right)$ في المعلم $\left(A\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$

فنجد $\begin{cases} x=x' \\ y=y' \\ z=2+z' \end{cases}$ أي $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \\ z'=z-2 \end{cases}$

معادلة المخروط في المعلم $\left(A\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$ هي $x'^2+y'^2-z'^2\tan^2\dfrac{\pi}{6}=0$

وعليه $x^2+y^2-(z-2)^2\times\dfrac{1}{3}=0$ أي $x^2+y^2-\dfrac{1}{3}(z-2)^2=0$

التمرين 10 : --

1- التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) :

لتكن $M\left(x\,;y\,;z\right)$ نقطة من الفضاء . تكون M نقطة من (Δ) إذا وفقط إذا كان

$\overrightarrow{AM}=t\,\vec{j}$ وعليه $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z-2=0 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=2 \end{cases}$

وهو التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) .

2- معادلة الأسطوانة :

نقوم بتغيير المعلم : لتكن $M\left(x\,;y\,;z\right)$ نقطة من الأسطوانة في المعلم $\left(o\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$

ونفرض أن $M\left(x'\,;y'\,;z'\right)$ في المعلم $\left(A\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$

لدينا $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$ وعليه $\begin{cases} x=0+x' \\ y=0+y' \\ z=2+z' \end{cases}$

معادلة الأسطوانة في المعلم $\left(A\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$ هي $x'^2+z'^2=(1)^2$

وعليه $x^2+(z-2)^2=1$ وهي معادلة الأسطوانة في المعلم $\left(o\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$.

19 - تكنولوجيا الإعلام والإتصال

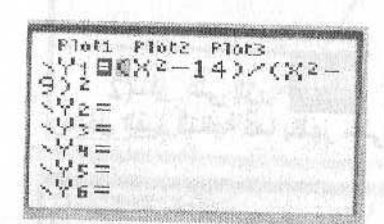
التطبيق1:

نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=\dfrac{x^2-14}{(x^2-9)^2}$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to3} f(x)=-\infty$

كيف يمكن تخمين هذه النتيجة باستعمال آلة بيانية

الحل :



1) ننقر على الزر :
ونكتب عبارة الدالة كمايلي :

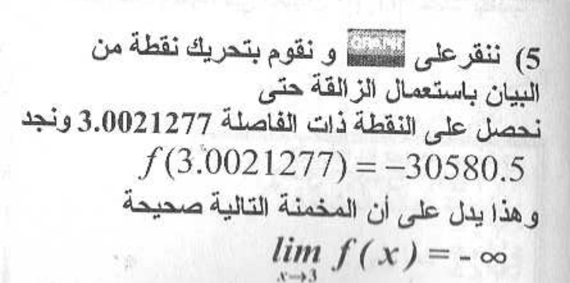
WINDOW
Xmin=2.9
Xmax=3.1
Xscl=1
Ymin=-37.9
Ymax=-11.8
Yscl=1
Xres=1

2) ننقر على الزر ونداخل الأرقام الآتية :
إن قيم x محصورة بين 2.9 و 3.1 لأن x يتناهى نحو 3 أما قيم $f(x)$ فهي محصورة بين $f(2.9)$ و $f(3,1)$ أي بين -37.9 و -11.8

ZOOM MEMORY
4:ZDecimal
5:ZSquare
6:ZStandard
7:ZTrig
8:ZInteger
9:ZoomStat
0:ZoomFit

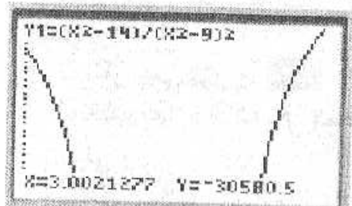
3) ننقر على الزر

ثم نختار ZoomFit
كما يظهر على الشاشة





4)ننقرعلى فنحصل على
التمثيل البياني المقابل :



5) ننقرعلى و نقوم بتحريك نقطة من البيان باستعمال الزالقة حتى
نحصل على النقطة ذات الفاصلة 3.0021277 ونجد
$f(3.0021277)=-30580.5$
وهذا يدل على أن المخمنة التالية صحيحة
$\lim\limits_{x\to3} f(x)=-\infty$

التطبيق 2:

باستعمال آلة بيانية ماهو تخمينك حول :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2+x+\cos x = +\infty$$

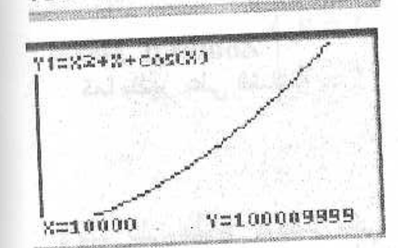
الحل :

1) ننقر على الزر : [Y=]
ونكتب عبارة الدالة كمايلي :

2) ننقر على الزر [WINDOW]
وندخل القيم التالية كما يظهر على الشاشة :

3) ننقر على الزر [GRAPH] فيظهر التمثيل البياني

4) ننقر على الزر [TRACE] ثم نحرك نقطة من البيان فنجد : $f(10000) = 100009999$



وبالتالي المخمنة التالية صحيحة :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2+x+\cos x = +\infty$$

التطبيق 3

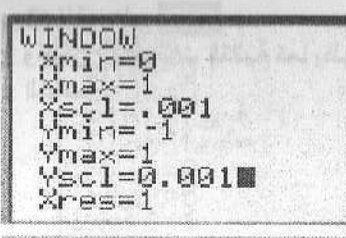
بين أن المعادلة : $x^5 + x^3 - 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;1[$ حيث يطلب إعطاء حصرا للحل بتقريب 10^{-3} .

الحل :

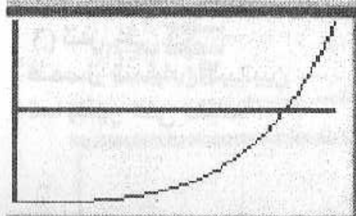
1) ننقر على الزر : [Y=]
ونكتب عبارة الدالة f المعرفة كمايلي :

$$f(x) = x^5 + x^3 - 1$$

2) ننقر على الزر [WINDOW]
وندخل الأرقام الآتية



3) ننقر على الزر [GRAPH] فيظهر التمثيل البياني الآتي :



4) نقوم بتحريك نقطة من البيان باستعمال الزر [TRACE] إلى أن تتغير إشارة $f(x)$

فمن أجل : $x = 0.82978723$ نجد

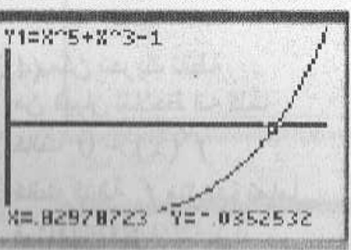
$$f(x) = -0.0352532$$

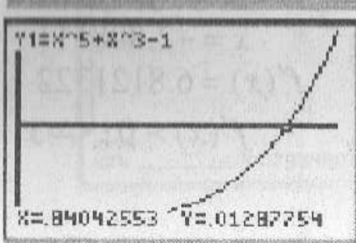
ومن أجل $x = 0.84042553$ نجد

$$f(x) = 0.01287754$$

ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد x_0 يحقق:

$$0.829 \prec x_0 \prec 0.840$$





التطبيق 4

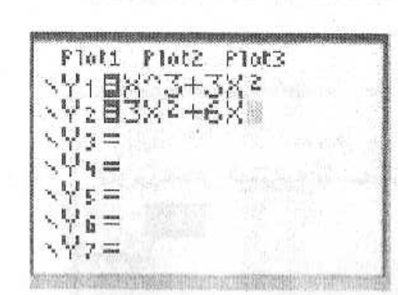
نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

تحقق باستعمال آلة بيانية التوافق بين اتجاه تغير الدالة f وإشارة الدالة المشتقة f'

الحل :

1) ننقر على الزر : [Y=]
ونكتب عبارة الدالة f في y_1
وعبارة الدالة المشتقة f'
في y_2 كما يلي :

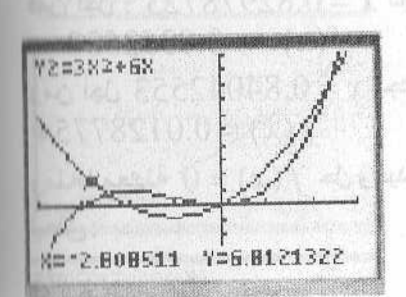


2) ننقر على WINDOW
وندخل المعلومات التالية كما يظهر على الشاشة :

```
WINDOW
 Xmin=-4
 Xmax=3
 Xscl=1
 Ymin=-16
 Ymax=40
 Yscl=4
 Xres=1
```

3) ننقر على GRAPH
فنحصل التمثيلين البيانيين
كما يظهر على الشاشة

4)يمكن تحريك نقطة
من البيان لنلاحظ أنه كلما
كانت $f'(x) \succ 0$
كانت الدالة f متزايدة تماما
فمثلا من أجل
$x = -2.808511$
$f'(x) = 6.8121322$
وعليه : $f'(x) \succ 0$



التطبيق5 :

أنشئ باستعمال آلة بيانية الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (U_n) حيث :

$U_0 = 1$ و $U_n = \cos(U_{n-1})$

الحل :

1) ننقر على الزر MODE
ونحول عمل الآلة إلى المتتاليات : Seq

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential Simul
Real a+bi re^θi
Full Horiz G-T
```

2) نقوم بإدخال المتتالية باستعمال
الزر Y=
كمايلي:

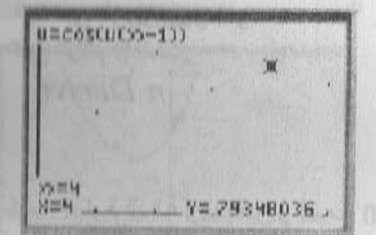
```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=cos(u(n-1))
u(nMin)=1
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=
```


3)ننقر على WINDOW وندخل الأرقام التالية :

```
WINDOW
 nMin=0
 nMax=5
 PlotStart=1
 PlotStep=1
 Xmin=0
 Xmax=5
↓Xscl=1
 Ymin=0
 Ymax=1
 Yscl=1
```

4) ننقر على الزر GRAPH فنحصل على
النقط التالية :

5) ننقر على الزر TRACE ونحرك زر الإتجاهات
لنحصل على حدود المتتالية



التطبيق 6 :

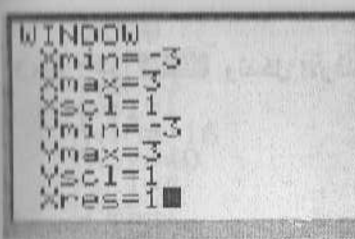
أنشئ التمثيل البياني (c) للدالة f حيث :
$f(x) = x + 1 + e^x$ باستعمال آلة بيانية .
أحسب العدد المشتق للدالة f عند العدد 0
أنشئ المماس (Δ) للمنحني (c) عند النقطة ذات الفاصلة 0

الحل

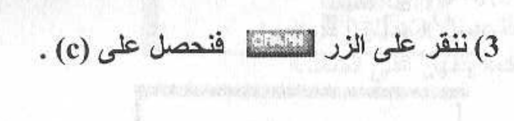
1) ننقر على الزر : Y=
ونكتب عبارة الدالة f المعرفة
كمايلي :
$f(x) = x + 1 + e^x$

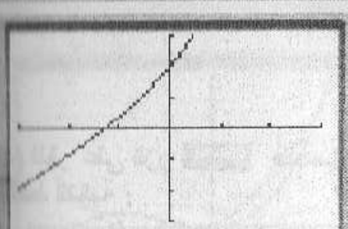
```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=X+1+e^(X)
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```

2) ننقر على WINDOW و نعطي قيما للمتغير x بين 3 و -3
وقيما للمتغير y بين 3 و -3



3) ننقر على الزر GRAPH فنحصل على (c) .





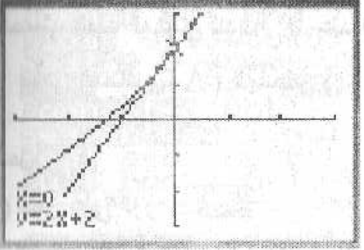
4) حساب العدد المشتق للدالة f عند العدد 0

ننقر على الزر MATH وننقر على الرقم 8 لنختار
$n\ Deriv($

ونكتب عبارة الدالة والمتغير والقيمة 0 كما يظهر على الشاشة ثم ننقر على Enter فنحصل على العدد 0 وهو العدد المشتق للدالة f عند 0

إذن $f'(0)=2$.

5) إنشاء المماس :
ننقر على اللمسة PRGM
ثم اللمسة ثم على الرقم 5
فنحصل على $\tan gent($
ونكتب عبارة الدالة وفاصلة النقطة
ونصادق باللمسة Enter مرتين .
فنحصل على المماس كما يظهر على الشكل.



التطبيق 7 :

أنشئ بآلة بيانية التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة بالعبارة :

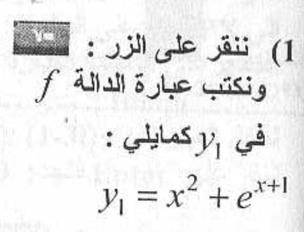
$$f(x)=x^2+e^{x+1}$$

أحسب التكامل الآتي : $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

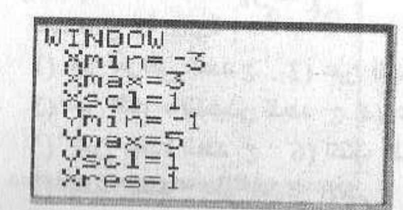
الحل :

1) ننقر على الزر : Y=
ونكتب عبارة الدالة f
في y_1 كمايلي :

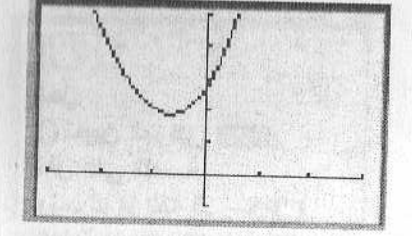
$$y_1 = x^2 + e^{x+1}$$



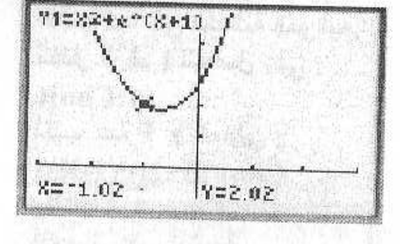
2) ننقر على اللمسة WINDOW وندخل الأرقام التالية



3) ننقر على الزر GRAPH فنحصل على (c)



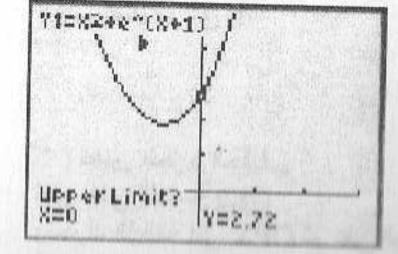
4) ننقر على الزر TRACE ونحرك زر الإتجاهات لتحريك نقطة من (C) حتى نحصل على النقطة ذات الفاصلة $x=-1$



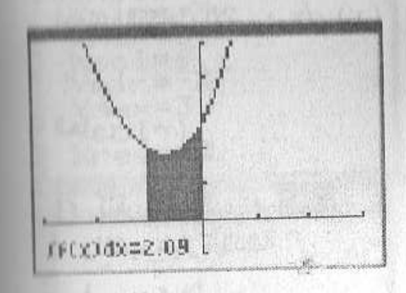
5) ننقر على اللمسة

ثم على اللمسة TRACE

ثم ننقر على العدد 7
ثم نصادق باللمسة Enter



6)نقوم بتحريك نقطة من (C) بواسطة زر الإتجاهات حتى نحصل على النقطة ذات الفاصلة $x = 0$ ثم نصادق باللمسة **Enter**



فنجد : $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = 2,09$

التطبيق 8

نعتبر العدد المركب $z = \frac{5+2i}{1-3i}$.

باستعمال آلة بيانية :

1) عين مرافق العدد z . 2) عين الجزء الحقيقي للعدد z

3) عين الجزء التخيلي للعدد z 4) عين طويلة العدد z

5) عين عمدة العدد z 6) أكتب العدد z على الشكل الجبري.

7) أكتب العدد z على الشكل الأسي.

الحل

1) تعيين المرافق MATH

ننقر على اللمسة

ونحرك الزالقة الى **CPX**

كمايظهر على الشاشة فتظهر

قائمة كما في الشاشة الموالية.

نختار الرقم 1 لنحصل على :

1:Conj(

نكتب عبارة **z** كمايلي :

Conj((5+2i)/(1-3i))

وننقر على **Enter**

فنحصل على النتيجة

-0,10-1,70i

والتي تمثل مرافق **z**

2) تعيين الجزء الحقيقي :

ننقر على اللمسة MATH

ونحرك الزالقة الى **CPX** ثم على الرقم 2

فتظهرعلى الشاشة العبارة : **real(**

ندخل العبارة : **real((5+2i)/ (1-3i))**

ننقر على **Enter** فنجد : **- 0,1 0**

3) تعيين الجزء التخيلي :

ننقر على اللمسة MATH ونحرك الزالقة

الى **CPX** ثم على الرقم 3

فتظهرعلى الشاشة العبارة :

Imag(

ندخل العبارة : **Imag((5+2i)/ (1-3i))**

ننقر على **Enter** فنجد: **1,70**

4)ننقر على اللمسة MATH

ونحرك الزالقة الى **CPX** ثم

على الرقم 5 فتظهرعلى الشاشة العبارة :

abs (

ندخل العبارة : **abs((5+2i)/ (1-3i))**

ننقر على **Enter** فنجد: **1,70**

5)ننقر على اللمسة MATH

ونحرك الزالقة الى **CPX** ثم

على الرقم 4 فتظهرعلى الشاشة العبارة :

angle (

ندخل العبارة : **angle((5+2i)/ (1-3i))**

ننقر على **Enter** فنجد: **1,63**

6)كتابة **Z** على الشكل الجبري :

نكتب على الشاشة عبارة **Z** كمايلي :

(5+2i)/ (1-3i)

ننقر على اللمسة MATH

ونحرك الزالقة الى **CPX**

ثم ننقرعلى الرقم 6 و ننقر على **Enter**

فتظهرعلى الشاشة العبارة :

-0,1+ 1,7 i

6) كتابة **Z** على الشكل الأسي :

نكتب على الشاشة عبارة **Z** كمايلي :

(5+2i)/ (1-3i)

ننقر على اللمسة MATH ونحرك الزالقة الى CPX
ثم ننقر على الرقم 7 و ننقر على Enter
فتظهر على الشاشة العبارة :

$$1,7e^{1,63i}$$

```
(5+2i)/(1-3i)▸Po
lar
  1.70e^(1.63i)
```

ملاحظة 1 :
لكتابة الحرف i نقوم بمايلي :
ننقر على اللمسة ___ ثم على اللمسة

ملاحظة 2 :
لتغيير عدد الأرقام بعد الفاصلة ننقر
على اللمسة MODE
ونحدد عدد الأرقام بعد الفاصلة باستعمال الزالقة
وهذا في السطر الثاني ثم ننقر على Enter
وقد اخترنا في الشكل ثلاثة أرقام بعد الفاصلة .

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential Simul
Real a+bi re^θi
Full Horiz G-T
```

التطبيق 9:

لدينا قطعة نقدية متوازنة تحمل الحرف F في وجه والحرف P في الوجه الآخر .

يقوم لاعب بالقاء القطعة النقدية 10 مرات متتالية . ويكون رابحا 100 دينار كلما ظهر الوجه F .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يعد عدد الحالات التي يظهر فيها F

إن X يتبع القانون الثنائي p_X ذو الوسيطين 10 و 0,5 . باستعمال البرمجية Sine qua non مثل بيانيا القانون p_X.

الحل :

نقوم بفتح المبرمج Sine qua non - ننقر على Definir

- نختار : Loi binomiale - نعطي القيمة 10 للوسيط n والقيمة 0,5 للوسيط p
- تظهر النافذة الموالية التي تعطي قيم $P(X=K)$ من أجل $0 \le K \le 1$ نختار منها سمك الخط ثم ننقر على OK فيظهر التمثيل البياني للقانون الثنائي.

Loi binomiale

n = Nombre de répétitions de l'épreuve : 8
p = Probabilité d'un succès lors d'une épreuve : 0,5

Type de calcul à visualiser
- p (X = k) k = 0
- p (X ≤ k)
- p (X ≥ k)
- p (a ≤ X ≤ b)

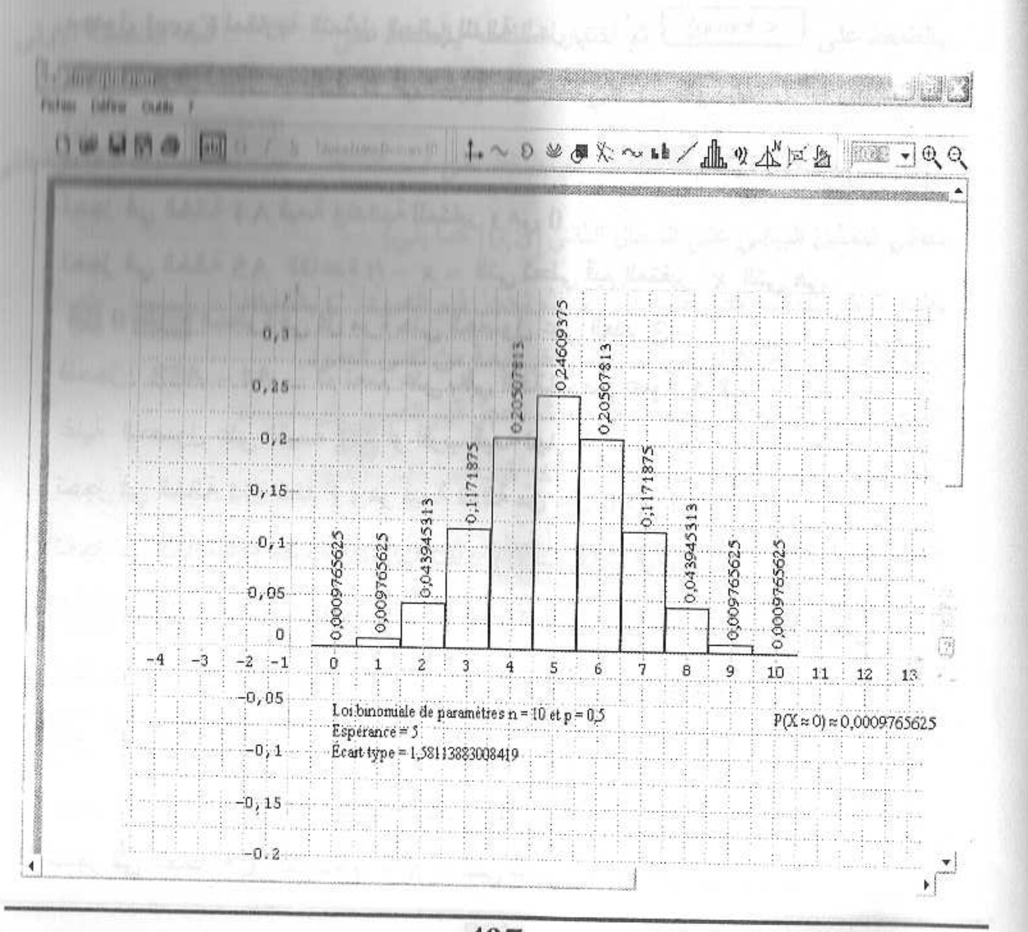
k	p (X = k)
0	0,00390625
1	0,03125
2	0,109375
3	0,21875
4	0,2734375
5	0,21875
6	0,109375
7	0,03125
8	0,00390625
P=	0,00390625

Couleurs
Histogramme :
zone à visualiser :

Epaisseur des traits de l'histogramme
- 1 point
- 2 points
- 3 points

Titre :
Affichage des résultats sur le graphique
Affichage des paramètres de la loi

Effacer tout OK



التطبيق 10:

أنشئ تمثيلا تقريبيا لحل المعادلة التفاضلية $y' = y$ و $y(0) = 1$ باستعمال طريقة Euler بمجدول Excel في المجال $[-3;3]$ والخطوة $h = 0.005$.

الحل : لدينا: $\Delta y \approx f'(x).\Delta x$ ومنه $f(x+h) - f(x) \approx f'(x).h$ أو $f(x-h) - f(x) \approx -f'(x).h$ مع $h > 0$

وبما أن $y' = y$ فإن $f(x) = f'(x)$ فنحصل على $f(x+h) \approx f(x).(1+h)$ أو $f(x-h) \approx f(x).(1-h)$.

نتحصل بالعبارة الأولى $f(x+h) \approx f(x).(1+h)$ قيم الدالة (الحل) من أجل $x > 0$

وتعطي العبارة الثانية $f(x-h) \approx f(x).(1-h)$ قيم الدالة (الحل) من أجل القيم $x < 0$

وذلك باعتبار $f(0) = 1$ في الانطلاقة وجعل h صغيرا بالقدر الذي يضمن تقريبا جيدا. نستخدم مجدول Excel لمقاربة التمثيل البياني للدالة الحل .

حجز الأعداد: نحجز الخطوة h في الخانة A3 مثلا.

على الجزء $[-3;0]$

نحجز في الخانة A4 قيمة إبتدائية للمتغير وهي 0

نحجز في الخانة A5 القاعدة $= x - h$ التي تعطي قيم المتغير x التي هي قبل 0 بطرح الخطوة في كل مرة حتى الحصول على العدد -3.

فنحجز: $= A4 - A\$3$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود A إلى غاية الحصول على القيمة -3 أو أقرب قيمة لها.

نحجز في الخانة B4 العدد 1 وهو قيمة الدالة من أجل 0 لأن $f(0) = 1$

نحجز في الخانة B5 القيمة التقريبية للعدد $y = f(x-h)$ ولدينا $f(x-h) \approx f(x).(1-h)$ فنحجز : $= B4*(1-A\$3)$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود B حتى الوصول إلى آخر قيمة للمتغير من العمود A

على الجزء $[0;3]$

نحجز في الخانة C4 قيمة ابتدائية للمتغير وهي 0

نحجز في الخانة C5 القاعدة $= x + h$ التي تعطي قيم المتغير x التي هي

بعد 0 بإضافة الخطوة في كل مرة حتى الحصول على العدد 3

فنحجز: $= C4 + A\$3$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود C إلى غاية الحصول على القيمة 3 أو أقرب قيمة لها.

نحجز في الخانة D4 العدد 1 وهو قيمة الدالة من أجل 0 لأن $f(0) = 1$

نحجز في الخانة D5 القيمة التقريبية للعدد $y = f(x+h)$ ولدينا $f(x+h) \approx f(x).(1+h)$ فنحجز : $= D4*(1+A\$3)$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود D حتى الوصول إلى آخر قيمة للمتغير من العمود B

التمثيل البياني: نختار العمودين A و B نضغط على المساعد البياني

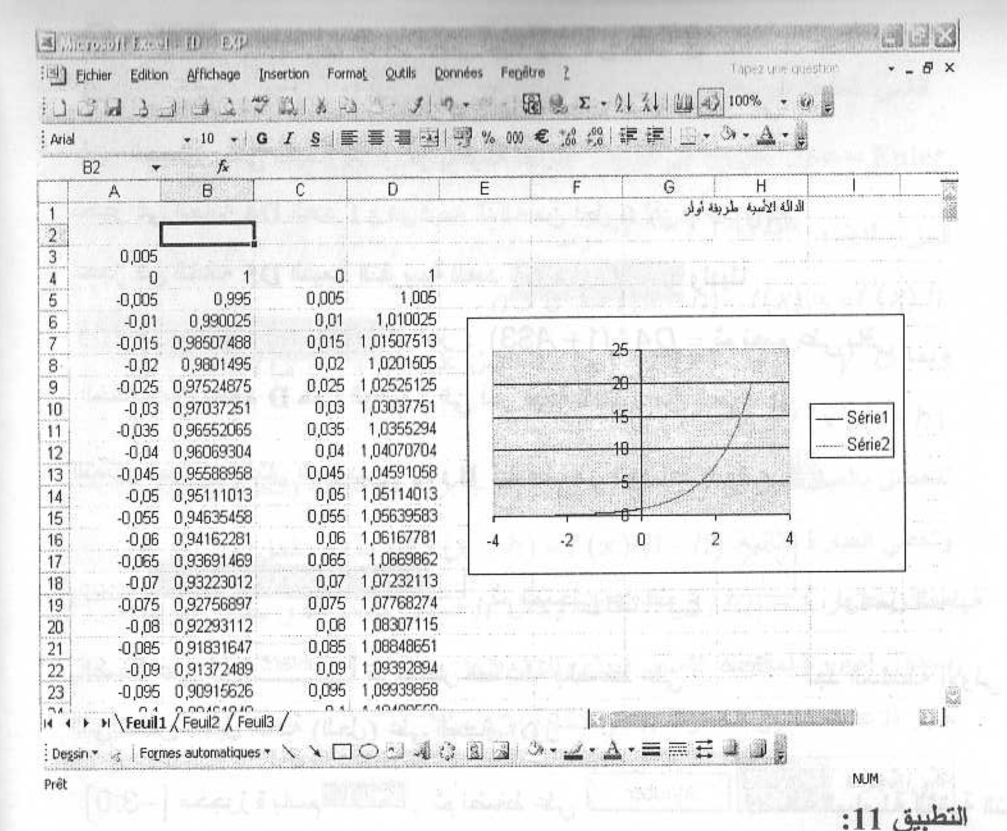
ونختار Nuages de points ثم المنحنى من النوع ، نواصل العملية بالضغط على Suivant > ثم اختيار السلسلة بالضغط على Série نجد السلسلة الأولى التي تخص تمثيل الدالة (الحل) على المجال الأول $[-3;0]$ محجوزة باسم Série1. ثم نضغط على Ajouter لإضافة السلسلة الثانية التي تعطي التمثيل البياني على المجال الثاني $[0;3]$ كما يلي:

نضع مؤشر الكتابة على خانة قيم x ثم نحجز قيم العمود C بالضغط بالفأرة من القيمة الأولى في C4 إلى آخر قيمة من نفس العمود.

نضع مؤشر الكتابة على خانة قيم y ثم نحجز قيم العمود D بالضغط بالفأرة من القيمة الأولى في D4 إلى آخر قيمة من نفس العمود.

نضغط بعدها على التالي Suivant > فيظهر المنحنيان مكملان لبعضهما بلونين مختلفين ،حيث يشكلان منحني الدالة (الحل) على المجال $[-3;3]$ ،

ثم الإنهاء Terminer



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								الدالة الأسية طريقة أولر
2								
3	0,005							
4	0	1	0	1				
5	-0,005	0,995	0,005	1,005				
6	-0,01	0,990025	0,01	1,010025				
7	-0,015	0,98507488	0,015	1,01507513				
8	-0,02	0,9801495	0,02	1,0201505				
9	-0,025	0,97524875	0,025	1,02525125				
10	-0,03	0,97037251	0,03	1,03037751				
11	-0,035	0,96552065	0,035	1,0355294				
12	-0,04	0,96069304	0,04	1,04070704				
13	-0,045	0,95588958	0,045	1,04591058				
14	-0,05	0,95111013	0,05	1,05114013				
15	-0,055	0,94635458	0,055	1,05639583				
16	-0,06	0,94162281	0,06	1,06167781				
17	-0,065	0,93691469	0,065	1,0669862				
18	-0,07	0,93223012	0,07	1,07232113				
19	-0,075	0,92756897	0,075	1,07768274				
20	-0,08	0,92293112	0,08	1,08307115				
21	-0,085	0,91831647	0,085	1,08848651				
22	-0,09	0,91372489	0,09	1,09392894				
23	-0,095	0,90915626	0,095	1,09939858				

التطبيق 11:

أنشئ تمثيلا تقريبيا لحل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{1}{x}$ مع الشرط $y(1) = 0$ باستعمال طريقة **Euler** بمجدول **Excel** في المجال $]0;b]$ والخطوة $h = 0.005$.

الحل

لدينا: $\Delta y \approx f'(x).\Delta x$ ومنه $f(x+h) - f(x) \approx f'(x).h$ أو

$f(x-h) - f(x) \approx -f'(x).h$ مع $h > 0$

$f(x+h) \approx f(x) + f'(x).h$ أو $f(x-h) \approx f(x) - f'(x).h$

وبما أن $y' = \frac{1}{x}$ فإن $f'(x) = \frac{1}{x}$ فنحصل على $f(x-h) \approx f(x) - \frac{h}{x}$

أو $f(x+h) \approx f(x) + \frac{h}{x}$.

نتحصل بالعبارة الأولى $f(x+h) \approx f(x) + \frac{h}{x}$ قيم الدالة (الحل) من أجل $x \geq 1$ وتعطي العبارة الثانية $f(x-h) \approx f(x) - f'(x).h$ قيم الدالة (الحل) من أجل القيم $0 \prec x \leq 1$ وذلك باعتبار $f(1) = 0$ في الانطلاقة وجعل h صغيرا بالقدر الذي يضمن تقريبا جيدا.

نستخدم مجدول **Excel** لمقاربة التمثيل البياني للدالة الحل.

حجز الأعداد: نحجز الخطوة h في الخانة $A3$ مثلا.

من أجل $0 \prec X \leq 1$

نحجز في الخانة $A4$ قيمة إبتدائية للمتغير وهي **1**

نحجز في الخانة $A5$ القاعدة $x - h =$ التي تعطي قيم المتغير x التي هي قبل **1** بطرح الخطوة في كل مرة حتى الحصول على قيمة قريبة من **0** فنحجز: $= A4 - A\$3$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود **A** إلى غاية الحصول على قيمة قريبة من **0** .

نحجز في الخانة $B4$ العدد **0** وهو قيمة الدالة من أجل **1** لأن $f(1) = 0$

نحجز في الخانة $B5$ القيمة التقريبية للعدد $y = f(x-h)$

ولدينا $f(x-h) \approx f(x) - f'(x).h$ فنحجز : $= B4 - \$A\$3 / A4$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود**B**حتى الوصول إلىآخر قيمة للمتغيرمن العمود **A**

من أجل $X \geq 1$

نحجز في الخانة $C4$ قيمة ابتدائية للمتغير وهي **1**

نحجز في الخانة $C5$ القاعدة $x + h =$ التي تعطي قيم المتغير x التي هي بعد **1** بإضافة الخطوة في كل مرة فنحجز: $= C4 + A\$3$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود C إلى غاية آخر قيمة للمتغير من العمود B

نحجز في الخانة $D4$ العدد **0** وهو قيمة الدالة من أجل **1** لأن $f(1) = 0$

نحجز في الخانة $D5$ القيمة التقريبية للعدد $y = f(x+h)$ ولدينا $f(x+h) \approx f(x) + f'(x).h$ فنحجز $= D4 + \$A\$3 / C4$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود **D** حتى الوصول إلى آخر قيمة للمتغير من العمود **B**.

التمثيل البياني:

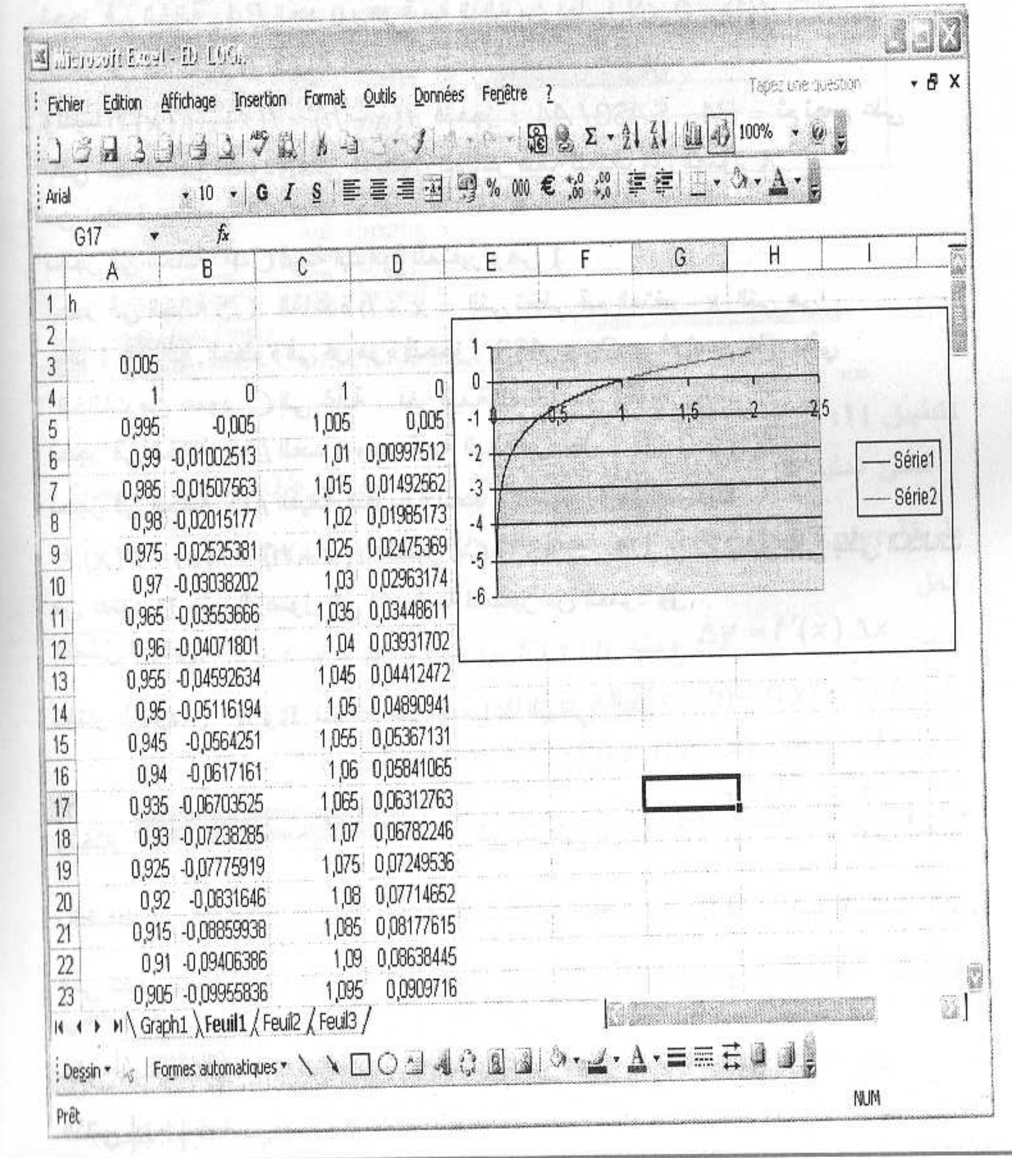
نختار العمودين **A** و**B** نضغط على المساعد البياني

ونختار Nuages de points ثم المنحنى من النوع ، نواصل العملية بالضغط على Suivant > ثم اختيار السلسلة بالضغط على Série نجد السلسلة الأولى التي تخص تمثيل الدالة (الحل) على المجال الأول $]0.1]$ محجوزة باسم Série1. ثم نضغط على Ajouter لإضافة السلسلة الثانية التي تعطي التمثيل البياني على المجال الثاني $[1;b[$ كما يلي:

نضع مؤشر الكتابة على خانة قيم x ثم نحجز قيم العمود **C** بالضغط بالفأرة من القيمة الأولى في $C4$ إلى آخر قيمة من نفس العمود.

نضع مؤشر الكتابة على خانة قيم y ثم نحجز قيم العمود **D** بالضغط بالفأرة من القيمة الأولى في $D4$ إلى آخر قيمة من نفس العمود.

نضغط بعدها على التالي [Suivant >] فيظهر المنحنيان مكملان لبعضهما بلونين مختلفين،حيث يشكلان منحني الدالة (الحل) على المجال $]0,b]$ ،ثم الإنهاء [Terminer]



	A	B	C	D
1	h			
2				
3	0,005			
4	1	0	1	0
5	0,995	-0,005	1,005	0,005
6	0,99	-0,01002513	1,01	0,00997512
7	0,985	-0,01507563	1,015	0,01492562
8	0,98	-0,02015177	1,02	0,01985173
9	0,975	-0,02525381	1,025	0,02475369
10	0,97	-0,03038202	1,03	0,02963174
11	0,965	-0,03553666	1,035	0,03448611
12	0,96	-0,04071801	1,04	0,03931702
13	0,955	-0,04592634	1,045	0,04412472
14	0,95	-0,05116194	1,05	0,04890941
15	0,945	-0,0564251	1,055	0,05367131
16	0,94	-0,0617161	1,06	0,05841065
17	0,935	-0,06703525	1,065	0,06312763
18	0,93	-0,07238285	1,07	0,06782246
19	0,925	-0,07775919	1,075	0,07249536
20	0,92	-0,0831646	1,08	0,07714652
21	0,915	-0,08859938	1,085	0,08177615
22	0,91	-0,09406386	1,09	0,08638445
23	0,905	-0,09955836	1,095	0,0909716

الفهرس

تم طبع هذا الكتاب بمطبعة

دار الحديث للكتاب القبة - الجزائر -

الهاتف : 81 -10 01 -017

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي   و للمؤلف بالخير

و النجاح و المغفرة